NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

LAQUIÈRE

# Quelques propriétés d’une classe de courbes spirales

*Nouvelles annales de mathématiques 3e série*, tome 2 (1883), p. 118-129

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1883_3_2__118_1>

## QUELQUES PROPRIÉTÉS D'UNE CLASSE DE COURBES SPIRALES;

Par M. Laquière.

Recherchons les *courbes dont la tangente tourne avec une vitesse angulaire d'orientation proportionnelle à celle du rayon vecteur mené d'un pôle fixe au point de contact.*

Cette définition caractérise une sorte de spirale s'infléchissant d'un mouvement uniforme sur le rayon vecteur $\rho$ quand celui-ci tourne lui-même d'un mouvement uniforme. Si nous désignons par $\frac{1}{p}$ le coefficient d'infléchissement et par V l'angle sous lequel la courbe coupe le rayon vecteur, on aura, en prenant pour axe d'orientation un rayon vecteur normal,

$$dV = \frac{1}{p}\, d\omega,$$

$$V = \frac{1}{p}\,\omega + \frac{\pi}{2},$$

$$\frac{\rho\, d\omega}{d\rho} = \operatorname{tang} V = -\frac{\cos \frac{\omega}{p}}{\sin \frac{\omega}{p}};$$

d'où l'équation générale des courbes, en coordonnées polaires,

$$(\mathrm{P}) \qquad \rho = a \cos^{p} \frac{\omega}{p}.$$

Si $p$ est positif, l'angle V augmente en même temps que l'angle polaire $\omega$, et la courbe est tout entière comprise dans l'intérieur du cercle $\rho = a$, de rayon égal à la normale à l'origine.

Si $p$ est négatif ($= -q$ pour mettre le signe en évidence), l'angle V diminuera quand $\omega$ augmentera et la courbe sera tout entière extérieure au cercle decrit du pôle comme centre avec la normale à l'origine pour rayon. Cette courbe

$$(\mathrm{Q}) \qquad \rho \cos^{q} \frac{\omega}{q} = a$$

est la réciproque par rayons vecteurs de la courbe

$$(\mathrm{P}) \qquad \rho = a \cos^{q} \frac{\omega}{q}$$

du premier système.

Suivant que $p$ est positif ou négatif, c'est-à-dire que les courbes appartiennent à la première série (P), courbes fermées, ou à la seconde (Q), courbes à branches infinies, les rayons vecteurs tangents au pôle, ou les asymptotes correspondent aux directions telles que

$$\frac{\omega}{p} = \frac{(2k-1)\pi}{2},$$

$k$ étant un entier quelconque.

Les points de contact sur le cercle $\rho = a$, ou sommets de la courbe, correspondent aux directions telles que

$$\frac{\omega}{p} = \frac{2k\pi}{2}.$$

Les rayons vecteurs normaux sont axes de la courbe. Il en est de même des rayons vecteurs tangents lorsque $p$ est pair.

*Boucles.* — Chaque fois que $\frac{\omega}{p}$ varie de $\frac{2k\pi}{2}$ à $\frac{(2k-1)\pi}{2}$, la courbe donne un arc composant une demi-boucle d'amplitude angulaire $p\frac{\pi}{2}$. Lorsque $\frac{\omega}{p}$ varie ensuite d'une quantité égale de $\frac{(2k+1)\pi}{2}$ à $\frac{(2k+2)\pi}{2}$, on obtient, si $p$ est pair, une demi-boucle symétrique de la précédente par rapport au rayon vecteur de contact (ou parallèle à l'asymptote) et, si $p$ est impair, une demi-boucle symétrique au contraire par rapport à la normale au point de jonction.

Les deux demi-boucles forment dans le second cas un arc continu symétrique par moitiés; dans le premier, elles ont l'apparence d'un arc symétrique ayant sur son axe de symétrie un point de rebroussement de première espèce. Ce point de rebroussement pourra être simplement apparent si la courbe est à centre et peut alors être décrite d'un trait continu par une autre succession des arcs partiels; il sera réel si la courbe n'a pas de centre au pôle. Dans ce dernier cas, la seconde demi-boucle peut être réelle, ou bien disparaître si $p$ avait une valeur fractionnaire irréductible à dénominateur pair ; alors la demi-boucle précédente présenterait au pôle une apparence de point d'arrêt. Toutefois ce point d'arrêt ne serait qu'apparent au point de vue graphique. Le rayon de départ, normal à la courbe, étant en effet axe de symétrie, en faisant tourner, à partir de sa position, le rayon vecteur en sens inverse, il repasse symétriquement par les mêmes valeurs en complétant la boucle d'une partie symétrique qui la ferme en présentant un point angulaire au lieu du point d'arrêt.

En réalité, une boucle complète correspond à la variation d'angle $\frac{\omega}{p}$ de $-\frac{\pi}{2}$ à $-\frac{\pi}{2}$, ayant pour amplitude de rotation $p\pi$.

La courbe se compose d'une succession (limitée ou indéfinie) de boucles égales disposées en rayon autour du pôle, milieu de toutes les boucles.

Nous n'entrerons pas dans les détails de la discussion descriptive des variétés de ces groupes qui sont enfantées par les diverses hypothèses à faire sur les valeurs respectives de $m$ et $n$, si l'on fait d'une manière générale $p = \frac{n}{m}$. Cette discussion, d'ailleurs fort intéressante, mais des plus faciles, peut se résumer en quelques mots, ainsi qu'il suit.

*Description.* — Les courbes spirales à inflexion proportionnelle, telles que la variation d'inclinaison de la tangente sur le rayon vecteur soit dans le rapport $\frac{m}{n}$ avec la rotation de celui-ci ($V$ variant de $\pi$ quand $\omega$ croît de $2\alpha = \frac{n}{m}\pi$), se composent de $m$ boucles d'amplitude angulaire commune égale à $\frac{n\pi}{m}$. Ces boucles, toutes égales entre elles dans une même courbe, sont disposées de la manière suivante, en supposant la faction $\frac{m}{n}$ rendue irréductible :

PREMIER CAS : *m et n impairs.* — $m$ boucles décrites d'un trait continu, alternativement dans l'angle du rayon vecteur et dans son opposé par le sommet. Les angles du plan d'amplitude $2\alpha = \frac{n}{m}\pi$ sont alternativement occupés par les boucles et vides. Leurs circonvolutions font $n$ fois le tour de la circonférence.

DEUXIÈME CAS : *n pair, m impair.* — $m$ boucles jointives à rebroussement de première espèce. Les circonvolutions n'occupent qu'un arc de rotation de $\frac{n}{2}$ circonférences.

TROISIÈME CAS : *m pair, n impair.* — Courbes à centre, formées de $m$ boucles disjointes, se réunissant au centre par les points anguleux dont les branches ont le même écartement que l'amplitude de la boucle.

Les deux branches symétriques par rapport au centre forment par leur réunion une ganse à centre et à double inflexion. La courbe entière se compose de $\frac{m}{2}$ ganses pareilles, séparées par des espaces vides d'amplitude angulaire égale à la leur, et occupant par moitié un espace angulaire de $n$ circonférences successives.

QUATRIÈME CAS : $\frac{m}{n}$ *incommensurable.* — Ce cas, multiple et analogue en ses trois divisions aux trois précédents, en diffère uniquement en ce que le nombre de boucles, toujours identiques entre elles, est indéfini, ainsi que le nombre de circonvolutions de la courbe.

Suivant la nature des termes $m$ et $n$ de la fraction, la courbe partagera les caractères généraux de la classe correspondante de courbes à coefficient d'infléchissement commensurable, savoir :

1° Courbes à trait continu, à rayons vecteurs alternativement positifs et négatifs pendant une amplitude déterminée;

2° Courbes à rebroussement de première espèce composées d'une succession indéfinie de boucles jointives identiques;

3° Courbes à centre, formées d'une série de ganses à centre et à double inflexion, se succédant indéfiniment en laissant entre elles des intervalles angulaires vides égaux à leur amplitude.

*Propriétés remarquables de ces courbes.* — Cherchons la distance $\delta$ du pôle à la tangente, rayon vecteur du point correspondant de la podaire du foyer par rapport à la courbe.

Soit $\theta$ l'orientation polaire de la perpendiculaire $\delta$ à la tangente; on voit immédiatement que

$$\theta = \omega + V - \frac{\pi}{2} = \omega\left(1 + \frac{1}{p}\right),$$

d'où

$$\text{(A)} \qquad \frac{\omega}{p} = \frac{\theta}{p+1} = V - \frac{\pi}{2}.$$

Dans cette relation, l'angle V représente à la fois l'inclinaison du rayon vecteur $(\rho, \omega)$ sur la courbe primitive $(p)$ et celle du rayon vecteur $(\delta, \theta)$ sur la podaire, angles égaux à simple inspection de la figure dans laquelle la normale à la podaire va passer par le milieu du rayon vecteur de la courbe.

On voit par suite que la podaire d'une spirale à inflexion proportionnelle à la rotation du rayon vecteur est une spirale de même nature, se déduisant de la première par la simple substitution de $(p+1)$ à $p$.

Le rapport du mouvement angulaire de la tangente par rapport au rayon vecteur au mouvement angulaire absolu de celui-ci étant, pour la courbe primitive,

$$\frac{dV}{d\omega} = \frac{1}{p} = \frac{m}{n},$$

sera, pour sa podaire, de

$$\frac{dV}{d\theta} = \frac{1}{p+1} = \frac{m}{n+m},$$

et au contraire pour la courbe antipodaire, dont la primitive est la podaire, de

$$\frac{dV}{d\psi} = \frac{1}{p-1} = \frac{m}{n-m}.$$

S'il s'agit de courbes à branches infinies, nous mettrons les signes en évidence en faisant $-p = q$, et nous aurons pour leur équation

$$\rho \cos^q \frac{\omega}{q} = a.$$

L'équation de la podaire de cette courbe est

$$\rho \cos^{q-1} \frac{\omega}{q-1} = a;$$

celle de son antipodaire

$$\rho \cos^{q+1} \frac{\omega}{q+1} = a.$$

*Distance de la tangente au pôle.* — La distance $\delta$ du pôle à la tangente à la courbe $p$, rayon correspondant de sa podaire, a pour valeur

$$\delta = \rho \sin V = \rho \cos \frac{1}{p} \omega = a \cos^{p+1} \frac{\omega}{p}.$$

Elle ne peut devenir nulle ou infinie que lorsque $\cos \frac{\omega}{p}$ est lui-même nul, c'est-à-dire pour les points extrêmes des boucles ou spires successives pour lesquelles $\rho$ est soit nul, soit infini. Il n'y a donc d'autres tangentes passant au pôle que les tangentes aux points où les boucles se croisent au pôle et les asymptotes.

*Asymptotes.* — La distance $\delta$ des asymptotes aux branches infinies est donnée par l'expression

$$\delta = a \cos^{1-q} \frac{\omega}{q}.$$

Trois cas sont à considérer relativement à leur position :

1° $q < 1$, $\delta = 0$. — Branches hyperboliques dont les asymptotes passent toutes au pôle. C'est le cas de $m^2 > n^2$.

2° $q = 1$, $\delta = a$. — Cas singulier. Droite à distance finie du pôle.

3° $q > 1$, $\delta = \infty$. — Toutes les branches sont paraboliques. C'est le cas de $m^2 < n^2$.

Ainsi, lorsque $m$ et $n$ sont de signes contraires, les branches infinies seront paraboliques ou bien auront des asymptotes issues du pôle suivant que $n$ sera de valeur absolue supérieure ou inférieure à celle de $m$.

*Remarque.* — Les courbes $(p)$ et les courbes $(q)$ pour lesquelles les arguments $p$ et $q$ ont la même valeur, étant évidemment transformées l'une de l'autre par rayons vecteurs réciproques issus du pôle, les asymptotes des courbes $(q)$ ou cercles de courbure de leurs points à l'infini sont les transformées des cercles de courbure des courbes $(p)$ en leurs points situés au pôle. Il en résulte les valeurs suivantes pour les rayons de courbure des branches au pôle, lorsque $\frac{1}{p} = \frac{m}{n}$ est positif :

1° *Infinis* pour $p < 1$, soit $m > n$;

2° *Égal* à $\frac{a}{2}$ pour $p = 1$, soit $m = n$;

3° *Nuls* pour $p > 1$, soit $m < n$.

Les courbes pour lesquelles $m > n$ sont donc infiniment aplaties au pôle ; celles pour lesquelles $m < n$ y sont infiniment courbées y présentent un point circulaire. Les premières y présentent une inflexion dans les courbes à centre, ou un point angulaire dans les courbes n'ayant pas de centre.

*Rayon de courbure.* — L'orientation $\theta$ de la normale étant liée à celle $\omega$ du rayon vecteur par la relation

$$\frac{\omega}{p} = \frac{\theta}{p+1},$$

le rayon de courbure R aura pour valeur

$$R = \frac{ds}{d\theta} = \frac{\rho\, d\omega}{\sin V} = \frac{p}{p+1}\,\frac{\rho}{\sin V}.$$

Or, désignant par N la longueur de la normale limitée à la perpendiculaire menée au rayon vecteur par le pôle, cette relation équivaut à

$$R = \frac{p}{p+1}\,N.$$

Le rayon de courbure est dans un rapport constant avec la normale (longueur limitée à la perpendiculaire au rayon vecteur). Cette remarquable propriété pourrait servir de définition au genre de courbes considéré.

Il en résulte que le rayon de courbure sera nul ou infini en même temps que la normale (sauf le cas de $p = -1$). Il ne peut donc être nul qu'au pôle, et infini qu'à l'infini ou lorsque le rayon vecteur est tangent à la courbe. On retrouve les conclusions déjà obtenues au sujet des asymptotes et des points circulaires. Si $p + 1 = 0$, la courbe est une droite et $R = \infty$ en tous ses points.

La courbe ne peut avoir d'inflexions qu'au pôle. Ce fait résulte *a priori* de ce que, le mouvement angulaire absolu de la tangente étant proportionnel à celui du rayon vecteur, est toujours de même sens que celui de ce dernier, ou toujours de sens contraire, et par suite de sens invariable.

*Remarque I.* — De tous les cercles tangents aux courbes passant par le pôle, aucun ne saurait être cercle de courbure au point de contact, puisqu'il se transformerait avec la courbe réciproque en une tangente passant au pôle touchant la courbe en un point à distance finie.

*Remarque II.* — Les rayons de courbure de deux courbes de paramètres différents en des points situés sur les mêmes rayons vecteurs sont dans le rapport

$$\frac{R}{R'} = \frac{p(p'+1)}{p'(p+1)}\frac{N}{N'} = \frac{\rho}{\rho'}\frac{\sin V}{\sin V'}\frac{p(p'+1)}{p'(p+1)}.$$

*Remarque III.* — Si l'on considère les deux courbes $(p)$ et $(p')$, telles que

$$p+p'=-1,$$

la courbe $p'=-(p+1)$ sera réciproque de la podaire de $(p)$, et par conséquent sa polaire réciproque par rapport au cercle de transformation $\rho=a$. L'angle des deux tangentes aux points des deux courbes situés sur le même rayon vecteur sera

$$V-V'=\omega\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p+1}\right).$$

Si l'on considère les courbes définies par les trois paramètres

$$\frac{1}{p}, \quad \frac{1}{p+1}, \quad -\frac{1}{p+1},$$

soit

$$\frac{m}{n}, \quad \frac{m}{n+m}, \quad \frac{-m}{m+n},$$

c'est-à-dire une courbe, sa podaire et sa polaire réciproque, appartenant toutes les trois à la même division (courbes continues, courbes à rebroussement, courbes à centre), le nombre $m$ des branches reste le même, mais leur amplitude dans les deux dernières est de $\pi$ supérieure à celle de la première pour chaque boucle, comme il est du reste évident *à priori,* puisque les rayons extrêmes de la podaire sont les perpendiculaires sur les rayons extrêmes de la courbe primitive symétriques l'un de l'autre par rapport au rayon vecteur normal, axe commun aux trois courbes.

*Remarque IV.* — L'angle des tangentes aux extrémités de deux rayons vecteurs est égal à la fraction constante

$$\frac{1}{p} = 1 + \frac{p+1}{p} = \frac{m+n}{n}, \quad \text{ou} \quad 1 - \frac{1}{q} = \frac{q-1}{q},$$

de l'angle de ces rayons vecteurs.

*Remarque V.* — Comme corollaire : Les tangentes aux $n$ points d'intersection d'un même rayon vecteur avec les diverses boucles, ou branches, sont parallèles aux côtés d'un polygone régulier de $2n$ côtés. En effet, les angles

$$V_1, \quad V_2, \quad V_3, \quad \ldots, \quad V_n$$

correspondant aux rotations

$$\omega + [0, \pi, 2\pi, \ldots, (n-1)\pi]$$

sont respectivement égaux à

$$\frac{\pi}{2} - \frac{\omega}{p} + \frac{1}{p}[0, \pi, 2\pi, \ldots, (n-1)\pi].$$

*Remarque VI.* — Si l'on considère une même courbe $(p)$ dans deux positions ne différant que par l'orientation de leurs axes faisant autour du pôle commun l'angle $\beta$, les tangentes aux points situés sur le même rayon vecteur dans l'une et l'autre courbe seront inclinées l'une sur l'autre de l'angle $\frac{\beta}{p}$. En conséquence :

*Remarque VII.* — Si l'on a une série de courbes $(p)$ de même pôle et homothétiques, elles auront pour trajectoires orthogonales la série des courbes $(p)$, semblables, de même pôle et dont les axes sont inclinésde l'angle $p\frac{\pi}{2}$ sur ceux des premières.

Les trajectoires coupant toutes les courbes de la série sous l'angle constant $\frac{\beta}{p}$ sont les courbes semblables, désorientées de l'angle $\beta$.

*Caustiques par réflexion du pôle.* — Le pôle étant considéré comme point lumineux, la caustique secondaire de la courbe

$$\rho = a\cos^p\frac{\omega}{p}$$

sera la courbe

$$\rho' = 2a\cos^{p+1}\frac{\omega}{p+1};$$

on sait en construire le centre de courbure, ou point brillant. La caustique par réflexion du pôle sur la courbe considérée comme miroir est donc connue par points.