NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

LAGUERRE

Sur les anticaustiques par réflexion de la parabole, les rayons incidents étant parallèles

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 2 (1883), p. 16-34

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1883_3_2__16_1>

SUR LES ANTICAUSTIQUES PAR RÉFLEXION DE LA PARABOLE, LES RAYONS INCIDENTS ÉTANT PARALLÈLES;

PAR M. LAGUERRE.

1. J'appelle *bissectrice* de deux semi-droites données la droite parfaitement déterminée qui est le lieu des cycles tangents à ces demi-droites; la droite menée par leur point de rencontre et perpendiculairement à la bissectrice sera désignée sous le nom de *bissectrice impropre*.

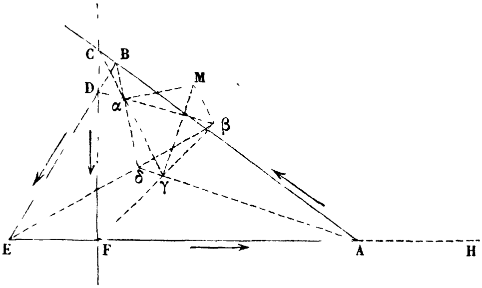
Deux demi-droites sont symétriques par rapport à leur bissectrice impropre; je dirai qu'elles sont *anti-symétriques* par rapport à leur bissectrice.

Ces définitions étant posées, je m'appuierai sur les lemmes suivants :

LEMME I. — *Quatre semi-droites étant données, si l'on considère trois à trois ces semi-droites, on obtient quatre triangles; les centres des cycles inscrits dans ces triangles sont sur un même cercle.*

Considérons en effet (*fig.* 1) les quatre semi-droites AB, BE, EA et CF. Les bissectrices des côtés du triangle ABC le coupent au point δ, celle du triangle BCD au point α, celles du triangle EDF au point β et celles du triangle CFA au point γ. Pour établir que ces quatre

Fig. 1.



points sont sur une même circonférence, il suffit d'établ irque l'angle $\alpha\delta\beta$ est égal à l'angle $\alpha\gamma\beta$.

On a évidemment

$$\widehat{\alpha\delta\lambda} = \widehat{BE\delta} + \widehat{EB\delta} = \tfrac{1}{2}\,\widehat{BEA} + \tfrac{1}{2}\,\widehat{EBA} - \tfrac{1}{2}\,\widehat{BAH};$$

d'autre part, on a

$$\widehat{\alpha\gamma\beta} = \widehat{FC\gamma} + \widehat{CF\gamma} = \tfrac{1}{2}\,\widehat{FCA} + \tfrac{1}{2}\,\widehat{CFA} = \tfrac{1}{2}\,\widehat{BAH}.$$

La proposition est donc démontrée.

2. Sur la circonférence $\alpha\gamma\beta\delta$, considérons le point M diamétralement opposé au point δ, on voit que les droites $M\alpha$, $M\beta$ et $M\gamma$ sont respectivement perpendiculaires aux droites $B\alpha$, $E\beta$ et $A\gamma$. Or α est le centre du cycle qui touche les semi-droites AB, BE et CF, β, le centre du cycle qui touche les semi-droites BE, AE et CF, et γ le centre du cycle qui touche les semi-droites AE, AB et CF. On peut donc énoncer la proposition suivante.

Lemme II. — *Étant données quatre semi-droites* D, D$'$, D$''$ *et* Δ, *soient* α, α', α'' *les centres des cycles inscrits respectivement dans les triangles déterminés par les* *semi-droites* (D', D'', Δ), (D'', D, Δ) et (D, D', Δ); *désignons par* β *le point de rencontre de* D' *et* D'', *par* β' *le point de rencontre de* D'' *et de* D *et enfin par* β'' *le point de rencontre de* D *et* D'.

Cela posé, les droites menées par les points α, α', α'' *et perpendiculaires respectivement aux droites* $\alpha\beta$, $\alpha'\beta'$ $\alpha''\beta''$ *concourent en un même point.*

3. Considérons maintenant deux semi-droites fixes A et Δ et une semi-droite mobile B assujettie à la condition suivante, à savoir que p désignant le point de rencontre de A et de Δ, q le centre du cycle inscrit dans le triangle formé par les semi-droites A, B et Δ, la droite menée par q perpendiculairement à pq passe par un point fixe F.

La semi-droite B enveloppera dans son mouvement une courbe parfaitement déterminée; elle est de l'espèce de celles que j'ai appelées *hypercycles* et de la troisième classe; c'est donc un *hypercycle cubique*. Dans tout le cours de cette Note, quand il n'y aura aucune confusion à craindre, je la désignerai simplement sous le nom d'*hypercycle;* comme je le montrerai plus tard, le point fixe F est le foyer de cette courbe ([1]).

4. Un hypercycle étant ainsi défini par les deux semi-droites A et Δ, considérons une autre tangente quelconque à la courbe C; en désignant par r le point de rencontre de A et de C, par s le centre du cycle tangent aux semi-droites A, C et Δ, il suit de la définition de la courbe que la droite menée par s perpendiculairement à rs passe par le foyer de la courbe. Soient maintenant

---

([1]) *Voir* à ce sujet ma Note *Sur les hypercycles* (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences,* séances des 20 mars, 3, 10 et 24 avril 1882).

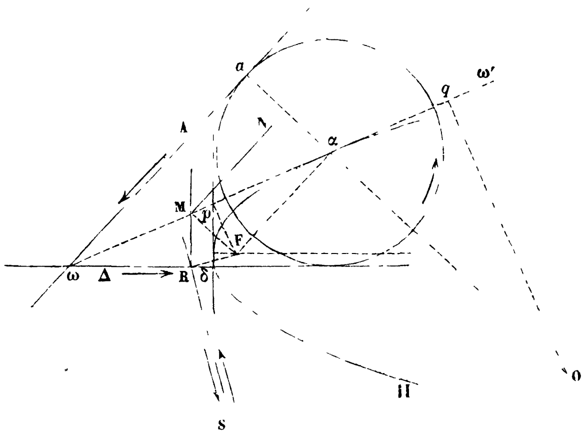
α le point de rencontre des tangentes C et B, β le centre du cycle tangent à B, C et Δ, il résulte du lemme II que la droite menée par β perpendiculairement à $\beta\alpha$ passe également par le foyer F.

Nous pouvons donc énoncer cette propriété fondamentale.

Théorème I. — *Etant données deux tangentes quelconques de l'hypercycle, considérons le centre du cycle qui touche ces deux tangentes et la semi-droite* Δ; *les droites, qui joignent ce centre au foyer de la courbe et au point de rencontre des tangentes, sont perpendiculaires entre elles.*

5. Considérons une tangente A(*fig.* 2) à un hypercycle H et a le point où elle touche la courbe; la tangente infiniment voisine A′ passe par le point A et la bissectrice de

Fig. 2.



deux semi-droites A et A′ est la normale menée au point a; soit α le point où cette normale rencontre la bissectrice des semi-droites A et Δ; d'après le théorème précédent, la droite $F\alpha$ est perpendiculaire à la normale et, par suite, parallèle à A. D'où la proposition suivante :

Étant donnée une tangente A *à l'hypercycle* H, *que par le foyer* F *de la courbe on mène une parallèle à* A, *et que l'on prenne son point de rencontre* α *avec la bissectrice des semi-droites* A *et* Δ ; *que du point* α *on abaisse ensuite une perpendiculaire de la tangente* A, *le pied* a *de cette perpendiculaire est le point de contact de* A *avec la courbe.*

6. La semi-droite Δ est tangente à la courbe. Supposons en effet (*fig.* 2) l'hypercycle défini par la semi-droite Δ et une tangente quelconque A. Soit $\omega\omega'$ la bissectrice des demi-droites A et Δ; abaissons du point F une perpendiculaire Fp sur $\omega\omega'$, puis, du point p, une perpendiculaire $p\delta$ sur Δ. Si nous imaginons une semi-droite Δ' infiniment voisine de Δ et passant par le point d, la bissectrice de Δ et de A est la droite $\omega\omega'$, le centre du cycle tangent à A, Δ et Δ' est évidemment le point p et, comme pF est perpendiculaire à $p\omega$, il résulte du théorème I que Δ' (et par suite Δ) est tangente à l'hypercycle ; son point de contact est le point A.

Je dirai que Δ est la tangente principale de la courbe.

Dans la démonstration précédente, A est une tangente quelconque de l'hypercycle ; lorsque cette tangente varie, on voit que la bissectrice $\omega\omega'$ enveloppe une parabole Π ayant F pour foyer, et $p\delta$ pour tangente au sommet : cela résulte immédiatement de ce que l'angle $Fp\omega$ est un angle droit.

Il est aisé de voir que la droite $\omega\omega'$ touche la parabole Π au point α ; de ce point, comme centre, décrivons un cycle touchant à la fois Δ et A ; son enveloppe, lorsque A se déplace tangentiellement à l'hypercycle, et que le point α décrira la parabole Π, se compose de la semi-droite Δ et de l'hypercycle H : on peut donc dire que *le lieu des centres des cycles, qui touchent l'hypercycle et la tangente fondamentale* Δ, *est la parabole* Π.

En d'autres termes :

L'hypercycle H *est une anticaustique* (¹) *par réflexion de la parabole* Π, *les rayons incidents étant perpendiculaires à l'axe de cette parabole.*

Remarque. — On voit que la parabole Π est le lieu des points α; il en résulte que *la parabole* Π *est le lieu des projections du foyer* F *sur les normales à l'hypercycle.*

7. *Tangentes que l'on peut mener à la courbe par un point situé sur une tangente donnée.*

Soient un hypercycle H défini par son foyer F, sa tangente principale Δ et une tangente quelconque A; soit, de plus, $\omega\omega'$ la bissectrice des semi-droites A et Δ. Étant pris sur A un point quelconque M, si nous imaginons une tangente quelconque menée de ce point à la courbe, il suit du théorème I que, du centre du cycle inscrit dans cette tangente, A et Δ, on doit voir sous un angle droit le segment MF. Soit MF comme diamètre décrivant un cercle, et soient α, β les points où ce cercle coupe la bissectrice $\omega\omega'$; il est clair, d'après ce qui précède, que les tangentes que, du point M, on peut mener à la courbe (et qui sont distinctes de A), sont les *antisymétriques* de A relativement aux droites $M\alpha$ et $M\beta$.

Remarque I. — Il résulte de la construction précédente que par chaque point du plan passent trois tan-

(¹) Dans la suite de cette Note, chaque fois que je parlerai d'une anticaustique, sans rien mentionner de plus, je supposerai expressément que les rayons incidents sont parallèles.

gentes à la courbe : l'hypercycle est donc une courbe de la troisième classe.

Remarque II. — Par le foyer F, menons une droite qui soit parallèle à la bissectrice $\omega\omega'$ et qui rencontre A au point p; soit q le point symétrique p relativement au point ω, intersection de A et de Δ. Si, sur qF comme diamètre, nous décrivons un cercle rencontrant la bissectrice $\omega\omega'$ aux points α et β, le centre de ce cercle est évidemment sur cette bissectrice; l'angle $\alpha q \beta$ est par conséquent droit, et les deux tangentes, que du point q on peut mener à l'hypercycle (indépendamment de la tangente A), sont des semi-droites opposées : cela résulte immédiatement de la construction donnée ci-dessus.

Ces deux tangentes sont distinctes, ainsi que leurs points de contact; la droite qui correspond à ces deux semi-droites opposées est donc une *tangente double* de la courbe; mais elle doit être considérée comme une *tangente double apparente* ([1]).

L'hypercycle, étant de la troisième classe et ayant une tangente double, est du quatrième degré.

Remarque III. — Supposons que le cercle décrit sur MF comme diamètre soit tangent à la bissectrice $\omega\omega'$; les points α et β étant confondus, il en est de même des

---

([1]) Au point de vue où nous sommes placés ici, une semi-droite est tangente double d'une courbe, si, en deux de ses points, elle a même direction que cette courbe; c'est alors une *tangente double effective*. Mais, si une droite est telle, qu'en la prenant d'abord dans un sens déterminé elle touche la courbe et qu'elle la touche encore en la prenant dans le sens inverse, on a une *tangente double apparente*.

Lorsqu'on effectue une transformation par directions réciproques, une tangente double effective a pour transformée une tangente double effective, tandis qu'une tangente double apparente (qui résulte de la superposition de deux tangentes opposées) a pour transformées deux tangentes ordinaires distinctes.

droites $M\alpha$ et $M\beta$; par suite, les tangentes menées du point M à la courbe (et distinctes de A) sont confondues. Le point M est donc situé sur la courbe; d'où la conclusion suivante :

Soit P *le pied de la perpendiculaire abaissée du foyer* F *sur la tangente* A; *par les deux points* F *et* P *on peut mener deux cercles tangents à la bissectrice de* A *et de la tangente fondamentale, les points où ces cercles coupent* A *sont les deux points (distincts du point de contact) où cette tangente coupe l'hypercycle.*

8. *Tangente parallèle à une semi-droite donnee* — L'hypercycle étant défini comme précédemment par son foyer F, la tangente fondamentale Δ et une tangente quelconque A, proposons-nous de mener à cette courbe une tangente parallèle à une semi-droite donnée D.

Construisons à cet effet la bissectrice (D, A) [1] et menons par le foyer F une perpendiculaire à (P, A); par le point β, où cette perpendiculaire coupe la bissectrice (A, Δ), menons une parallèle à (D, A) rencontrant au point α la tangente A. Il résulte du théorème I que l'antisymétrique de A relativement à la droite $\alpha\beta$ est une tangente à la courbe qui est évidemment parallèle à la semi-droite donnée D.

On peut donc mener, une tangente et une seule, qui soit parallèle à une semi-droite donnée; comme on peut mener également une tangente parallèle à la semi-droite opposée, il en résulte que, par un point situé à l'infini, on peut généralement mener deux tangentes à la courbe.

---

[1] Ici et comme dans tout ce qui suit, je désigne, pour abréger, par la notation (P, Q) la bissectrice de deux semi-droites données P et Q.

La courbe étant de troisième classe, on voit qu'elle est nécessairement tangente à la droite de l'infini.

Deux cas particuliers sont à remarquer : si la droite donnée est antiparallèle à Δ, les bissectrices (D, A) sont (Δ, A) perpendiculaires, et le point β est répété à l'infini. La tangente antiparallèle à Δ étant rejetée à l'infini, on voit que le point de contact de l'hypercycle avec la droite de l'infini est sur Δ; en d'autres termes :

La tangente principale est la tangente que l'on peut mener à la courbe par le point où elle touche la droite de l'infini.

Considérons, en second lieu, le cas où D est une direction isotrope; je ferai remarquer à ce sujet qu'*une semi-droite isotrope doit être considérée comme se confondant avec son opposée* ([1]).

Si donc on considère un des ombilics du plan (c'est-à-dire des deux points imaginaires communs à tous les cercles du plan), on voit que par ce plan on ne peut mener à la courbe qu'une tangente distincte de la droite de l'infini : d'où il résulte que ce point est situé sur la courbe.

L'hypercycle est donc une courbe de la troisième classe et du quatrième degré, tangente à la droite de l'infini et passant par les ombilics. Elle a un seul foyer, qui est un foyer singulier; la construction donnée ci-dessus montre aisément que ce foyer est le point F ([2]).

Réciproquement, toute courbe de la troisième classe et du quatrième degré qui touche la droite de l'infini et passe par les ombilics du plan est un hypercycle.

([1]) On voit qu'il n'y a pas besoin de distinguer le sens dans lequel est décrite une droite isotrope ; ainsi *droite isotrope* et *semi-droite isotrope* ont exactement la même signification.

([2]) Il suffit de remarquer que la bissectrice d'une semi-droite donnée et d'une droite isotrope est cette droite isotrope elle-même.

9. Voici encore une conséquence de la construction donnée ci-dessus. Une tangente A étant donnée, cherchons à déterminer la tangente A′ parallèle à la direction opposée. La bissectrice (A, A′) est une droite parallèle à A, et la perpendiculaire abaissée du foyer F sur cette droite rencontre la bissectrice $\omega\omega'$ au point M (*fig.* 2) : d'où il résulte que A′ est l'antisymétrique A par rapport à la droite MN menée par le point M parallèlement à A.

Or l'enveloppe de cette droite est aisée à trouver ; l'angle MFα étant droit, le point M décrit la directrice de la parabole Π, et l'angle NMF étant également droit, MN enveloppe une parabole Π′, qui a pour foyer F et pour tangente au sommet la directrice MR de la parabole Π.

Je ferai remarquer que la droite RS, menée par le point R perpendiculairement à RF, est la tangente double de la courbe.

10. L'hypercycle étant défini comme enveloppe d'une semi-droite mobile est, comme le cycle une *courbe de direction;* je veux dire par là qu'en chacun de ses points la tangente est déterminée de position et de direction.

Considérons un cycle C et le cercle K déterminé par ce cycle; le cercle K étant de seconde classe et l'hypercycle de la troisième, ces deux courbes ont en commun six tangentes dont la direction est déterminée, puisqu'elles touchent l'hypercycle. De ces six semi-droites, trois seulement sont tangentes à C, les autres étant tangentes au cycle opposé.

Ainsi, *un cycle et un hypercycle ont trois tangentes communes.*

11. *Détermination des tangentes communes à un cycle qui touche une tangente à l'hypercycle.*— Considérons un cycle C qui touche une tangente A à l'hyper-

cycle; il a en commun, avec cette courbe, deux autres tangentes que l'on peut déterminer par la règle et le compas.

A cet effet, Δ désignant la tangente principale de la courbe, F son foyer et $\omega\omega'$ la bissectrice (A, D), appelons O le centre du cycle donné, et qui est ainsi bien défini; sur OF comme diamètre, décrivons un cercle K qui coupe $\omega\omega'$ aux points γ et δ; joignons Oα et Oβ, et soient γ' et δ' les points où ces droites rencontrent la tangente A.

Cela posé, on vérifiera facilement que les tangentes menées des points α' et β' au cycle C sont les tangentes cherchées.

12. *Construction du cycle osculateur en un point donné.* — Soit (*fig.* 2) à construire le cycle osculateur au point a où la tangente A touche la courbe. Si le cycle C est osculateur, les points γ' et δ' doivent se confondre avec le point a, et par conséquent les points γ et δ avec le point α. Le cercle K touche donc la bissectrice $\omega\omega'$ au point α, et son centre est déterminé, puisqu'il est, en outre, sur la droite élevée par le milieu du segment Fα perpendiculaire à ce segment.

De là la construction simple suivante :

F*p étant la perpendiculaire abaissée du foyer* F *sur la bissectrice* $\omega\omega'$, *déterminons le point q symétrique de p par rapport à* α *et au point q, menons une droite perpendiculaire à* $\omega\omega'$: *le point* O *où cette droite rencontre la normale est le centre du cycle osculateur de la courbe au point a.*

13. *Lieu des centres des cycles qui touchent l'hypercycle et une tangente donnée de cette courbe.* — En conservant les mêmes notations que ci-dessus, sup-

posons que le cycle qui a pour centre le point O soit tangent à l'hypercycle; les deux points γ' et δ' seront alors confondus, ainsi que les points γ, δ. Le cercle décrit sur OF comme diamètre touche donc $\omega\omega'$; son centre O', étant également distant du point F et de $\omega\omega'$, décrit une parabole ayant F pour foyer et $\omega\omega'$ comme directrice, et, par suite, le centre O décrit une parabole P ayant F pour foyer et $\omega\omega'$ pour tangente au sommet.

La même proposition peut s'énoncer de la façon suivante :

L'hypercycle est une anticaustique de la parabole P, *les rayons incidents étant perpendiculaires à la tangente* A.

Un hypercycle peut être ainsi considéré d'une infinité de façons comme une anticaustique de parabole; toutes les paraboles qui correspondent à ce mode de génération sont homofocales, et leurs tangentes au sommet enveloppent la parabole Π.

14. Il résulte également de là le théorème suivant, qui exprime une propriété de six semi-droites quelconques tangentes à un même hypercycle :

Théorème II. — *Si six semi-droites* A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 *et* A_6 *sont tangentes à un même hypercycle, les cinq bissectrices* (A_1, A_2), (A_1, A_3), (A_1, A_4), (A_1, A_5) et (A_1, A_6) *sont tangentes à une même parabole.*

Le foyer de cette parabole est le foyer de l'hypercycle.

15. Comme je l'ai dit plus haut, l'hypercycle est une courbe de direction; en d'autres termes, en chaque point de cette courbe, la tangente est déterminée non seulement en position, mais encore en direction. Il en est de

même du cycle; mais une courbe algébrique, prise au hasard, n'est pas une courbe de direction.

Étant donnée une courbe algébrique K de classe n, si, en la supposant décrite dans un certain sens, on peut la transformer en une courbe de direction K_0, il faut que, étant donné un cycle quelconque C, des $2n$ tangentes communes à K et à C, n soient seulement des tangentes effectives à K_0, les n autres étant des tangentes apparentes.

De là résulte que l'équation qui détermine les tangentes communes à K et à C doit, par l'extraction d'une simple racine carrée, se ramener à la résolution des deux équations du degré n; et, comme (en coordonnées rectangulaires) l'équation tangentielle d'un cercle quelconque est

$$u^2 + v^2 = (\alpha u + \beta v + \gamma)^2,$$

il en résulte que l'équation tangentielle la plus générale d'une courbe de direction est de la forme

$$F^2(u, v) = (u^2 + v^2)\,\Phi^2(u, v),$$

F et Φ désignant deux fonctions rationnelles de u et de v.

16. Lorsque l'équation d'une courbe algébrique K du degré n n'est pas de la forme que je viens d'indiquer (telle est, par exemple, une conique quelconque différente du cercle), pour la transformer en une courbe de direction, il faut la considérer comme double, et comme le résultat de la superposition de deux courbes opposées qui sont l'enveloppe d'un cycle de rayon infiniment petit dont le centre décrit la courbe K.

Une telle courbe doit être considérée comme double; en chacun de ses points on peut mener deux tangentes qui sont des semi-droites opposées, et, au point de vue où nous sommes placés, elle est de la classe $2n$.

17. Étant données une courbe algébrique quelconque K et une semi-droite Δ, considérons les cycles qui, ayant leur centre sur K, sont tangents à Δ; ils enveloppent évidemment une courbe de direction G, qui est une anticaustique de K, les rayons incidents étant perpendiculaires à Δ.

Ainsi toute anticaustique d'une courbe algébrique est une courbe de direction; réciproquement, étant donnée une courbe de direction quelconque G, elle est une anticaustique d'une infinité de courbes algébriques que l'on déterminera de la façon suivante.

Étant prises arbitrairement une semi-droite Δ et une tangente quelconque T à la courbe G, que l'on construise la bissectrice (T, Δ); lorsque T se déplace tangentiellement à G, la droite (T, Δ) enveloppe une courbe algébrique K, qui est le lieu des centres des cycles qui touchent à la fois Δ et la courbe G.

Si la courbe G est une courbe double, en chaque point M de cette courbe, on peut mener deux tangentes opposées, et si N désigne le point où elles rencontrent Δ, par N passent deux bissectrices rectangulaires entre elles, dont l'enveloppe est la courbe K.

Dans ce cas, l'enveloppe des cycles tangents à Δ et ayant leur centre sur K est la *courbe double* G, chaque point M de G étant le point de contact de deux cycles tangents à Δ et ayant leur centre sur K; ou, si l'on veut encore, chaque point de G étant situé sur deux rayons réfléchis sur K.

18. On peut encore énoncer les résultats qui précèdent sous la forme suivante : G désignant une courbe algébrique, traçons dans le plan une droite arbitraire D, menons une tangente T à G et construisons les deux bissectrices rectangulaires des droites T et D; cela posé, lorque T se déplace tangentiellement à la courbe, ces bissectrices enveloppent une autre courbe. Si cette dernière courbe se décompose en deux autres, on peut transformer la courbe G en une courbe de direction en donnant en chacun de ses points une direction à la tangente. On retrouverait ainsi la condition analytique que j'ai donnée plus haut, à savoir que l'équation en coordonnées tangentielles d'une courbe de direction est de la forme $F^2(u, v) = (u^2 + v^2)\,\Phi^2(u, v)$.

Les courbes parallèles à une courbe de direction et l'enveloppe de ses normales sont également des courbes de direction; il en est de même des caustiques par réflexion des courbes algébriques, les rayons incidents étant parallèles.

19. Considérons une courbe de direction G qui est l'enveloppe des cycles dont les centres décrivent la courbe K, tandis qu'ils demeurent tangents à une semi-droite Δ.

Effectuons une transformation par semi-droites réciproques; soient G_0 la transformée de G, et Δ_0 la semi-droite transformée de Δ. G_0 peut être considéré comme l'enveloppe de cycles tangents à Δ_0, et dont les centres parcourent une courbe K_0.

Il est aisé d'établir que K_0 est une transformée homographique de K, la transformation étant de telle nature que la droite de l'infini se correspond à elle-même.

Prenons en effet pour axe des x l'axe de la transformation, et pour axe des y une droite perpendiculaire. Soient x, y les coordonnées du centre d'un cycle tangent à Δ et à G, et r son rayon; soient X, Y les coordonnées du cercle transformé et R son rayon. On aura les formules suivantes ([1]):

$$Y = x, \quad Y - y = \alpha(R - r), \quad Y + y = \frac{1}{\alpha}(R + r);$$

en éliminant R entre les deux dernières relations, il vient

$$Y = \frac{(\alpha^2 - 1)y - 2\alpha r}{\alpha^2 + 1}.$$

Si maintenant on remarque que le cercle de rayon r demeure tangent à une semi-droite fixe du plan, on voit que, *en grandeur et en signe*, r est exprimé par une fonction linéaire de x et de y.

On a donc une relation de la forme

$$Y = Ax + By + C,$$

où A, B, C désignent des constantes, et cette formule, jointe à la formule $X = x$, démontre la proposition énoncée.

Une transformation homographique, qui conserve la droite de l'infini, transformant une conique en conique et une parabole en parabole, il en résulte qu'une anticaustique de conique se transforme, par une transformation par directions réciproques, en une anticaustique de conique, et qu'un hypercycle (qui est une anticaustique de parabole) a pour transformée un autre hypercycle ([2]).

([1]) Voir le *Traité de Géométrie*, de MM. Rouché et de Comberousse, 5e édition, p. 270, et *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 3e série, t. I, p. 550.

([2]) Sur ce point et sur d'autres propriétés de l'hypercycle, voir ma Note *Sur les hypercycles*, insérée dans les *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, séances des 20 et 27 mars, 3, 10 et 24 avril 1882.

20. *Un hypercycle est déterminé quand on se donne cinq de ses tangentes.* — Cinq tangentes A, B, C, D, E étant en effet données, que l'on construise, par exemple, les quatre bissectrices (A, B), (A, C), (A, D), (A, E), et la parabole P tangente à ces quatre droites; il est clair, d'après ce qui précède, que l'hypercycle est l'enveloppe des cycles qui touchent A, et dont le centre décrit P; son foyer est du reste le foyer de P.

La proposition précédente signifie qu'il y existe un seul hypercycle touchant *cinq semi-droites données*, mais il y existe seize hypercycles touchant *cinq droites données*. Ayant en effet attribué un sens arbitraire à l'une des droites pour la transformée en semi-droites, on peut attribuer à chacune des quatre autres un sens arbitraire, ce qui donne lieu à seize combinaisons différentes.

21. *Indépendamment de la droite de l'infini, deux hypercycles quelconques* H *et* H' *ont quatre tangentes communes.* — Soient, en effet, H_0 la courbe H' considérée indépendamment de son sens; H_0 et H, étant toutes les deux de troisième classe, ont neuf tangentes communes. Abstraction faite de la droite de l'infini, il en reste huit autres qui sont tangentes soit à H, soit à la courbe H_1 opposée à H. Deux hypercycles ne peuvent d'ailleurs, d'après le théorème précédent, avoir plus de quatre tangentes communes; des huit tangentes considérées, quatre sont donc tangentes à H et quatre tangentes à H_1, ce qui démontre la proposition énoncée.

22. *Faisceaux d'hypercycles.* — Je dirai que l'ensemble des hypercycles qui touchent quatre semi-droites données constitue un faisceau.

Il est clair, d'après ce qui précède, que, parmi les hypercycles d'un faisceau, il n'y en a qu'un qui touche une semi-droite donnée; on prouvera facilement qu'il y en a quatre qui passent par un point donné.

Le lieu des foyers des hypercycles du faisceau déterminé par quatre semi-droites données A, B, C, D est le cercle qui contient (lemme I) les centres des cycles inscrits dans les triangles que l'on détermine en considérant trois à trois les semi-droites données.

Considérons en effet les bissectrices (A, B), (A, C) et (A, D); on voit que les foyers des hypercycles du faisceau sont les foyers des paraboles tangentes à ces trois droites; or, d'après un théorème connu, le lieu de ces foyers est le cercle circonscrit au triangle formé par ces droites, d'où la proposition énoncée.

23. *Hypercycles exceptionnels.* — Un point d à l'infini étant défini par un système (D) de semi-droites parallèles entre elles, on peut considérer l'ensemble du point d et d'un cycle quelconque C comme constituant un hypercycle. Les tangentes que l'on peut, d'un point quelconque M du plan, mener à cet hypercycle exceptionnel se composent des tangentes menées du point M au cycle et de la semi-droite menée par M parallèlement au système (D).

Étant donné un tel hypercycle exceptionnel (d, C), si l'on mène à C une tangente antiparallèle au système (D) [1], cette tangente est la tangente principale du cycle exceptionnel, et la droite correspondante en est la tangente double.

C'est ce que l'on verra facilement sur la *fig.* 2, en

[1] Je rappellerai que deux semi-droites sont dites *antiparallèles* lorsque, les droites qu'elles déterminent étant parallèles, elles sont dirigées en sens inverse.

supposant que le foyer F se rapproche indéfiniment de la bissectrice $\omega\omega'$ et vient se placer sur cette droite, auquel cas l'hypercycle se réduit à un cycle et à un point à l'infini.

24. Un faisceau déterminé par quatre semi-droites A, B, C, D renferme quatre cycles exceptionnels, à savoir :

Celui qui est déterminé par le cycle inscrit dans A, B, C et le point à l'infini sur D, celui qui est déterminé par le cycle inscrit dans B, C, D et le point situé à l'infini sur A, celui qui est déterminé par le cycle inscrit dans C, D, A et le point situé à l'infini sur B, et enfin celui qui est déterminé par le cycle inscrit dans D, A, B et le point à l'infini sur C.

La considération de ces cycles exceptionnels est d'une grande importance dans la théorie des faisceaux d'hypercycles, théorie sur laquelle j'aurai occasion de revenir.