X. ANTOMARI

Relations entre les distances d'un foyer d'une conique à quatre points ou à quatre tangentes

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 2 (1883), p. 193-208

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1883_3_2__193_0>

RELATIONS ENTRE LES DISTANCES D'UN FOYER D'UNE CONIQUE A QUATRE POINTS OU A QUATRE TANGENTES;

PAR M. X. ANTOMARI,
Professeur au lycée de Carcassonne.

INTRODUCTION.

1. Les propriétés focales dont il va être question sont relatives aux distances d'un foyer à quatre points ou à quatre tangentes.

Trois points et un foyer déterminent une courbe du second degré; par conséquent, étant donnés un foyer et quatre points, il doit exister une relation entre les éléments qui déterminent ces cinq points.

De même un foyer et trois tangentes déterminent une courbe du second degré. Il y aura donc une relation entre les éléments qui déterminent un foyer et quatre tangentes.

Ces relations n'ont pas été remarquées jusqu'ici, du moins à notre connaissance. Elles sont susceptibles d'applications intéressantes et permettent en particulier de déterminer simplement les foyers dans les sections coniques.

Nous avons divisé notre travail en deux Parties :

Dans la première Partie, nous nous occupons de la relation entre un foyer et quatre points; comme nous le verrons, cette relation a lieu entre les distances du foyer aux quatre points. Nous l'appliquons à la recherche des foyers dans les trois courbes, et nous terminons par une propriété de quatre coniques circonscrites à un quadrilatère.

Dans la deuxième Partie, nous nous occupons de la relation entre un foyer et quatre tangentes : c'est une relation entre les distances du foyer aux quatre tangentes. Nous l'appliquons aussi à la recherche des foyers et nous terminons par une propriété de quatre coniques inscrites dans un quadrilatère.

PREMIÈRE PARTIE.

RELATION ENTRE LES DISTANCES D'UN FOYER A QUATRE POINTS.

2. Soient α et β les coordonnées d'un foyer,

$$mx + ny + h = 0$$

l'équation de la directrice correspondante. L'équation de la courbe peut alors se mettre sous la forme

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = (mx + ny + h)^2.$$

Désignons par D la distance d'un point (x, y) de la courbe au foyer, on aura

$$D = \pm (mx + ny + h).$$

Considérons quatre points appartenant à une même branche, et appelons (x, y), (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) les coordonnées de ces quatre points, D, D_1, D_2, D_3 les distances au foyer.

Pour ces quatre distances, il faudra prendre le même signe devant les parenthèses : supposons que ce soit le signe $+$. On aura

$$\begin{aligned}
D &= mx + ny + h,\\
D_1 &= mx_1 + ny_1 + h,\\
D_2 &= mx_2 + ny_2 + h,\\
D_3 &= mx_3 + ny_3 + h.
\end{aligned}$$

L'élimination de m, n et h entre ces quatre équations donne la relation

$$(1)\qquad \begin{vmatrix} D & x & y & 1 \\ D_1 & x_1 & y_1 & 1 \\ D_2 & x_2 & y_2 & 1 \\ D_3 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Cette relation est homogène en D, D_1, D_2, D_3. Ainsi :

THÉORÈME I. — *Étant donnés quatre points d'une conique appartenant à une même branche, il y a une relation linéaire et homogène entre les distances de ces quatre points à un foyer.*

Remarque. — La relation serait encore linéaire et homogène si les quatre points n'appartenaient pas à la même branche. Le théorème précédent peut donc être énoncé d'une manière générale :

Il y a une relation linéaire et homogène entre les distances de quatre points quelconques d'une conique à un foyer.

Remarque II. — L'équation (1) développée peut s'écrire

$$(2)\qquad AD - A_1 D_1 + A_2 D_2 - A_3 D_3 = 0,$$

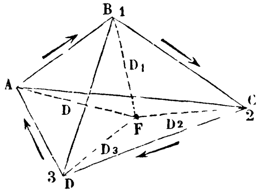
en posant

$$A = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}, \quad A_1 = \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix},$$

$$A_2 = \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}, \quad A_3 = \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Soient A, B, C, D les quatre points et F le foyer. Si l'on construit le quadrilatère ABCD, on voit facilement que, si l'on adopte pour sens positif le sens indiqué par

Fig. 1.



les flèches, on a (*fig.* 1)

$$A = 2 \text{ surf. } BCD,$$
$$A_1 = 2 \text{ surf. } ACD,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

de sorte que les quatre quantités A, A_1, A_2, A_3 sont liées par la relation

$$A + A_2 = A_1 + A_3 = 2 \text{ surf. } ABCD.$$

Nous pouvons maintenant compléter l'énoncé du théorème I, et nous voyons que :

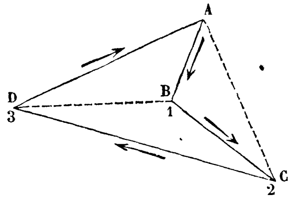
Si les sommets d'un quadrilatère convexe inscrit dans une conique appartiennent à une même branche de courbe, et si l'on multiplie la distance de chaque sommet au foyer par l'aire du triangle formé par les trois autres sommets, la somme des produits, correspondant à deux sommets opposés, est égale à la somme des deux autres produits.

3. Supposons maintenant que trois sommets seulement appartiennent à une même branche de courbe. Alors l'un des sommets sera à l'intérieur du triangle formé par les trois autres (*fig.* 2).

Si les trois points A, B, C appartiennent à la même branche, le point B, par exemple, sera à l'intérieur du triangle ACD.

Adoptons pour sens positif le sens indiqué par les

Fig. 2.



flèches. Le triangle ABC étant parcouru en sens contraire, la quantité

$$A_3 = \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}$$

représentera le double de l'aire du triangle ABC changée de signe. D'autre part, le point D appartenant à la deuxième branche, la distance D_3 devra être prise avec le signe —; de sorte que l'on aura encore

$$AD - A_1 D_1 + A_2 D_2 - A_3 D_3 = 0,$$

A, A_1, A_2, A_3 ayant la même signification que précédemment, et l'énoncé du théorème (I) subsiste ici sans modifications.

4. Examinons enfin l'hypothèse de deux points sur chaque branche. Le quadrilatère ayant pour sommets ces quatre points sera forcément convexe.

Soient A et B les deux points appartenant à la première branche, C et D les deux autres. Les distances D_2 et D_3 devront être prises avec le signe —, et la relation devient

$$AD - A_1 D_1 - A_2 D_2 + A_3 D_3 = 0$$

ou

$$(2) \qquad AD - A_2 D_2 = A_1 D_1 - A_3 D_3.$$

A, A_1, A_2, A_3 désignant respectivement le double de l'aire du triangle opposé.

Ainsi :

THÉORÈME II. — *Étant donné un quadrilatère inscrit dans une hyperbole, et tel qu'il y ait deux sommets sur chaque branche, si l'on multiplie la distance de chaque sommet au foyer par l'aire du triangle formé par les trois autres sommets, la différence des produits correspondant à deux sommets opposés est égale à la différence des deux autres produits.*

THÉORÈME III. — *Étant donnés un point fixe* F, *trois points fixes* B, C, D *et un point variable* A, *si, en multipliant la distance au point* F *de chaque sommet du quadrilatère* ABCD *par l'aire du triangle formé par les trois autres sommets, la somme ou la différence des produits correspondant à deux sommets opposés est égale à la somme ou à la différence des deux autres, le point mobile décrit une conique ayant pour foyer le point* F.

Supposons qu'il s'agisse de la somme des produits. Soient (x, y) les coordonnées du point mobile, (x_1, y_1),... les coordonnées des points fixes, D, D_1, D_2, D_3 les distances respectives au point F. On devra avoir

$$AD - A_1D_1 - A_2D_2 - A_3D_3 = 0,$$

A désignant l'aire du triangle BCD (*fig.* 1), A_1 celle du triangle ACD, ...

L'équation précédente peut évidemment s'écrire

$$(3)\qquad \begin{vmatrix} D & x & y & 1 \\ D_1 & x_1 & y_1 & 1 \\ D_2 & x_2 & y_2 & 1 \\ D_3 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Sous cette forme, il est manifeste qu'elle représente une conique ayant pour foyer F.

La démonstration serait la même dans le cas de la différence.

THÉORÈME IV (Réciproque des théorèmes I et II). — *Si un point* F, *pris dans le plan d'un quadrilatère* ABCD (*fig.* 1), *est tel que l'on ait*

$$(4)\qquad (BCD)D - (ACD)D_1 - (ABD)D_2 - (ABC)D_3 = 0$$

ou

$$(5)\qquad (BCD)D - (ACD)D_1 - (ABD)D_2 - (ABC)D_3 = 0,$$

les quatre points A, B, C, D *sont sur une même conique ayant pour foyer le point* F.

Occupons-nous, par exemple, de l'équation (4), et remarquons d'abord que la conique représentée par l'équation (3) passe par les trois points (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) : c'est donc la conique définie par le point F et par les trois points B, C, D.

Considérons actuellement cette même conique. Son équation sera, d'après cela,

$$(6)\qquad \begin{vmatrix} \Delta & X & Y & 1 \\ D_1 & x_1 & y_1 & 1 \\ D_2 & x_2 & y_2 & 1 \\ D_3 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Or on a, en vertu de l'équation (4),

$$(7)\qquad \begin{vmatrix} D & x & y & 1 \\ D_1 & x_1 & y_1 & 1 \\ D_2 & x_2 & y_2 & 1 \\ D_3 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

ce qui exprime que le point (x, y) est sur la courbe (6), et par suite que les quatre points sont sur une même conique ayant pour foyer le point F.

7. Il résulte de ce qui précède que, si l'on prend la différence des produits, la courbe du théorème III sera toujours une hyperbole, tandis que, si l'on prend la somme, elle pourra être l'une quelconque des trois courbes du second degré.

Reprenons donc l'équation (3) et voyons le genre de courbe qu'elle pourra représenter.

L'équation de la directrice est

$$(8)\qquad x\begin{vmatrix} D_1 & y_1 & 1\\ D_2 & y_2 & 1\\ D_3 & y_3 & 1\end{vmatrix} - y\begin{vmatrix} D_1 & x_1 & 1\\ D_2 & x_2 & 1\\ D_3 & x_3 & 1\end{vmatrix} + \begin{vmatrix} D_1 & x_1 & y_1\\ D_2 & x_2 & y_2\\ D_3 & x_3 & y_3\end{vmatrix} = 0.$$

Pour abréger, nous désignerons par m le coefficient de x et par $-n$ le coefficient de y, de telle sorte que nous aurons

$$\begin{aligned} m &= D_1(y_2-y_3) - D_2(y_1-y_3) + D_3(y_1-y_2),\\ n &= -D_1(x_2-x_3) + D_2(x_1-x_3) - D_3(x_1-x_2)\end{aligned}$$

et, par suite,

$$m^2+n^2=\left\{\begin{aligned} &[(x_2-x_3)^2+(y_2-y_3)^2]D_1^2\\ &+[(x_1-x_3)^2+(y_1-y_3)^2]D_2^2\\ &+[(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2]D_3^2\\ &-2D_1D_2[(y_2-y_3)(y_1-y_3)+(x_2-x_3)(x_1-x_3)]\\ &-2D_1D_3[(y_1-y_2)(y_3-y_2)+(x_1-x_2)(x_3-x_2)]\\ &-2D_2D_3[(y_3-y_1)(y_2-y_1)+(x_3-x_1)(x_2-x_1)].\end{aligned}\right.$$

Soient F le foyer et BCD le triangle formé par les trois points (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) (*fig.* 3).

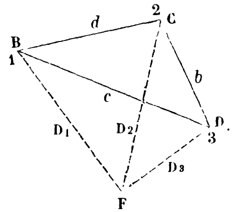
On voit sans difficulté que la relation (9) devient

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned} &m^2+n^2 = d^2D_3^2 + b^2D_1^2 + c^2D_2^2\\ &\qquad -2bcD_1D_2\cos D - 2bdD_1D_3\cos C - 2cdD_2D_3\cos B.\end{aligned}\right.$$

Or le triangle BCD nous donne

$$2bc\cos D = b^2 + c^2 - d^2,$$
$$2bd\cos C = b^2 + d^2 - c^2,$$
$$2cd\cos B = c^2 + d^2 - b^2.$$

Fig. 3.



Remplaçons dans l'équation (10), elle devient par une transformation simple

$$m^2 + n^2 = d^2(D_3 - D_2)(D_3 - D_1) + b^2(D_1 - D_2)(D_1 - D_3) + c^2(D_2 - D_1)(D_2 - D_3).$$

D'autre part, le coefficient de D, dans l'équation (3), est

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 2S,$$

S désignant la surface du triangle BCD.

Il en résulte que la courbe sera une ellipse, une hyperbole ou une parabole suivant que l'on aura

$$(11)\quad \left\{ \begin{aligned} & d^2(D_3 - D_2)(D_3 - D_1) \\ & \quad + b^2(D_1 - D_2)(D_1 - D_3) + c^2(D_2 - D_1)(D_2 - D_3) \lesseqgtr 4S^2. \end{aligned} \right.$$

8. Théorème V. — *Il existe une relation du second degré entre les distances au foyer des trois sommets d'un triangle inscrit dans une parabole.*

En effet, nous venons de voir que, si la courbe (3) est une parabole, on a

$$(12)\quad \begin{cases} d^2(D_3 - D_2)(D_3 - D_1) + b^2(D_1 - D_2)(D_1 - D_3) \\ \qquad + c^2(D_2 - D_1)(D_2 - D_3) = 4S^2. \end{cases}$$

Cette relation est du second degré par rapport à D_1, D_2, D_3.

9. Théorème VI. — *Si, par les divers points d'une conique, on élève sur le plan de la courbe des perpendiculaires égales respectivement aux rayons vecteurs allant au foyer, les extrémités de ces perpendiculaires sont situées dans un même plan.*

Supposons en effet que, dans l'équation (3), D, D_1,... représentent les z des points (x_1, y_1), ... Le premier membre de cette équation exprime alors que le volume du tétraèdre, qui a pour sommets les quatre points (x, y, D), (x_1, y_1, D_1), ..., est nul, c'est-à dire que ces quatre points sont dans un même plan.

Cela résulte d'ailleurs immédiatement de l'équation

$$D = mx + ny + h;$$

car, si, dans cette équation, on remplace D par z, elle représente un plan : ce plan passe par la directrice.

Remarque I. — Plus généralement, si par les divers points d'une conique on mène des parallèles à une direction fixe, proportionnelles aux rayons vecteurs respectifs menés d'un foyer à ces points, les extrémités de ces droites seront dans le même plan.

En effet, en remplaçant D par $\frac{z}{K}$ dans la même équation, on obtient une nouvelle équation représentant encore un plan.

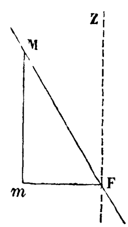
Remarque II. — Deux parallèles à la direction fixe devront être de même sens ou de sens contraires suivant que les deux points appartiennent à la même branche ou à deux branches différentes.

A l'aide des remarques précédentes, on démontre simplement deux théoremes bien connus ; ce sont les suivants :

10. Théorème VII. — *Toute section plane d'un cône de révolution se projette sur un plan perpendiculaire à l'axe mené par le sommet suivant une conique ayant pour foyer le sommet du cône.*

Soient, en effet, F le foyer d'une conique (*fig.* 4), m un point de la courbe et $Mm = K.\, mF$ une perpendiculaire

Fig. 4.



au plan de la courbe menée par le point m. Joignons M et F. Le triangle MmF donne

$$Mm = mF \operatorname{tang} \widehat{mFM}.$$

Il en résulte

$$\operatorname{tang} \widehat{mFM} = K.$$

L'angle mFM étant constant, la droite MF engendre un cône de révolution lorsque le point m décrit la conique.

D'ailleurs la conique peut être considérée comme la projection sur son plan de la section faite dans ce cône par un plan sécant quelconque $z = K(mx + ny + h)$; d'où le théorème énoncé.

11. Théorème VIII. — *Toute section plane d'un cône du second ordre se projette sur un plan cyclique mené par le sommet, et lorsque les projetantes sont parallèles au diamètre conjugué au plan cyclique considéré, suivant une conique ayant pour foyer le sommet du cône.*

En effet, si la direction Mm (*fig.* 4) n'est plus perpendiculaire au plan de la conique, l'angle $\widehat{mFM}$ n'est plus constant, et MF engendre un cône quelconque du second ordre. Seulement ce cône admet le plan de la conique comme plan cyclique.

Application a la détermination des foyers dans les courbes du second ordre.

12. Nous allons appliquer les résultats qui précèdent à la détermination des foyers dans les courbes du second ordre.

Avant d'aborder cette question, il est bon de faire quelques remarques.

L'équation d'une courbe du second degré, quand elle possède un foyer (α, β), peut se mettre sous la forme

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2-(mx+ny+a)^2=0. \tag{13}$$

Si, dans cette équation, on fait $x=\alpha$, $y=\beta$, le résultat de la substitution est $-(m\alpha+n\beta+h)^2$: il a donc le signe $-$.

Si l'on remplace x et y par les coordonnées d'un point quelconque de la directrice, le résultat de la substitution est $(x_1-\alpha)^2+(y_1-\beta)^2$, x_1 et y_1 étant les coordonnées de ce point : ce résultat est donc positif.

Donc :

Théorème IX. — *Dans toute courbe du second degré, le foyer, s'il y en a un, et un point quelconque de la* *directrice correspondante appartiennent à des régions différentes.*

Il en résulte que :

1° *Dans l'ellipse et dans la parabole, les foyers sont intérieurs à la courbe et la directrice extérieure.*

Car, si un foyer était extérieur, ou si la directrice coupait la courbe, il y aurait des points de la directrice qui appartiendraient à la même région que le foyer.

2° *Dans l'hyperbole, la directrice est dans la même région que les asymptotes.*

Même démonstration que plus haut.

Passons maintenant à la détermination des foyers. Nous examinerons pour cela séparément chaque genre de courbe.

I. — Foyers de l'ellipse.

13. Nous avons vu que, si un quadrilatère ABCD (*fig.* 1) est inscrit dans une ellipse, on a la relation

$$AD - A_1 D_1 + A_2 D_2 - A_3 D_3 = 0.$$

Je rappelle que, si D est la distance du foyer au point A, la quantité A est l'aire du triangle BCD, ...

Supposons que le quadrilatère inscrit devienne un parallélogramme. On aura

$$A = A_1 = A_2 = A_3,$$

et, par suite,

$$D - D_1 + D_2 - D_3 = 0,$$

ou

$$D + D_2 = D_1 + D_3.$$

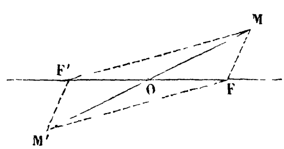
Ainsi :

Théorème X. — *Si un parallélogramme est inscrit* *dans une ellipse, la somme des distances d'un foyer à deux sommets opposés est égale à la somme des distances du même foyer aux deux autres sommets.*

Ce théorème est évident si l'on part de la définition géométrique de l'ellipse. Nous le trouvons ici directement comme conséquence du théorème I, et nous allons nous en servir d'abord pour établir la définition géométrique, et ensuite pour déterminer les foyers.

14. *Définition géométrique.* — Pour arriver à la définition géométrique de l'ellipse, remarquons que, si la courbe admet un foyer F (*fig.* 5), le point F′ symétrique

Fig. 5.



du point F par rapport au centre sera aussi un foyer.

D'autre part, si un parallélogramme est inscrit dans une ellipse, les diagonales sont des diamètres de la courbe, de sorte que le théorème X peut s'énoncer :

La somme des distances d'un foyer aux deux extrémités d'un diamètre est constante.

Soient alors M et M′ deux points diamétralement opposés. La figure MFM′F′ est un parallélogramme; et, puisque

$$MF + M'F = k,$$

k étant une constante, il en résulte

$$MF + MF' = k.$$

Ainsi :

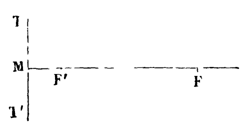
Théorème XI. — *Dans toute ellipse, la somme des* *distances d'un point quelconque de la courbe aux deux foyers est constante.*

13. *Détermination des foyers.* — A l'aide du théorème XI, et sans connaître la position exacte des foyers, on démontrera par le procédé ordinaire que *la tangente à l'ellipse fait des angles égaux avec les rayons vecteurs allant des foyers au point de contact.*

La démonstration de cette proposition est bien connue, et nous ne la rappellerons pas. Cependant nous ferons remarquer qu'elle repose uniquement sur cette propriété : *La somme des distances d'un point quelconque de la courbe aux deux foyers est constante,* et la position exacte des foyers n'y joue aucun rôle.

Considérons alors le diamètre qui contient les foyers. Soient M l'extrémité de ce diamètre, TT′ la tangente en M (*fig.* 6); les rayons vecteurs sont confondus.

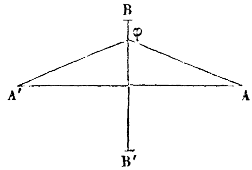
Fig. 6.



Or l'angle TMF doit être égal à l'angle T′MF : donc le diamètre FF′ doit être normal à la courbe, et les foyers, s'ils existent, ne peuvent se trouver que sur l'un des axes.

Supposons que les foyers soient sur le petit axe. Soient φ

Fig. 7.



l'un des foyers et AA′ le grand axe (*fig.* 7).

Puisque la somme des distances aux extrémités d'un diamètre est constante, on aura, en la désignant par S,

$$S = \varphi B + \varphi B' = \varphi A + \varphi A,$$

ce qui est impossible, puisque l'on a

$$\varphi A + \varphi A' > AA'$$

et, à plus forte raison,

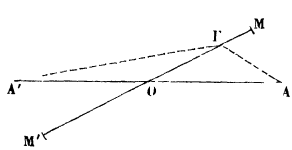
$$\varphi A + \varphi A' > BB'.$$

Ainsi les foyers sont sur le grand axe, et la somme S est égale à $2a$, a désignant le demi-grand axe.

On obtient par suite les foyers en décrivant du point B *comme centre une circonférence de rayon égal à a.* Cette circonférence coupe AA' en deux points et, par suite, il y a deux foyers dans l'ellipse.

16. On aurait pu arriver aux mêmes conclusions sans faire intervenir la propriété de la tangente. En effet, soient F un foyer intérieur à la courbe, MM' le diamètre qui passe par ce point (*fig.* 8) et AA' le grand axe. La

Fig. 8.



somme des distances du point F aux extrémités d'un diamètre étant constante, on aura, en la désignant par S,

$$S = FM - FM' = FA + FA'.$$

Or $FA + FA' > AA'$ et à plus forte raison plus grand que MM' : donc, pour que l'égalité précédente puisse avoir lieu, il faut que le point F soit sur AA', et l'on achèvera comme plus haut. (*A suivre.*)