NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

WALECKI

Démonstration du théorème de d'Alembert

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 2 (1883), p. 241-248

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1883_3_2__241_0>

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME DE D'ALEMBERT;

PAR M. WALECKI,
Professeur de Mathématiques spéciales au lycée Condorcet.

La démonstration qui suit reproduit, avec quelques développements, une Note insérée aux *Comptes rendus* (19 mars 1882) : qu'il me soit permis de remercier ici M. Laguerre qui m'a indiqué une simplification notable dans le mode d'exposition.

1. A l'égard de l'élimination d'une variable, je rappelle sommairement comment on l'établit sans employer le théorème de d'Alembert.

P et Q étant deux polynômes des degrés m et n, si l'on cherche deux polynômes P' et Q' des degrés $m-1$ et $n-1$, tels que l'on ait identiquement

$$PQ' - QP' = 0, \tag{1}$$

on a, pour déterminer les $m+n$ coefficients de P' et de Q', $m+n$ équations linéaires et homogènes, dont le déterminant Δ est appelé le résultant des deux polynômes P et Q.

La condition $\Delta = 0$ est donc nécessaire et suffisante pour que les polynômes P' et Q' existent, sans être à la fois tous deux identiquement nuls.

Il est clair dès lors que Δ est nul dans chacun des trois cas suivants :

1° Quand l'un des polynômes P et Q s'évanouit;

2° Quand le terme de plus haut degré s'évanouit à la fois dans P et dans Q;

3° Quand P et Q admettent un diviseur commun, de degré au moins égal à l'unité.

Réciproquement, si Δ est nul, les polynômes P et Q présentent l'une des particularités énoncées. En effet, si l'un seul des polynômes P' et Q' s'évanouit, soit Q' par exemple, l'identité exige que Q s'évanouisse aussi, et l'on est dans le premier cas.

Si aucun des polynômes P' et Q' ne s'évanouit, ou bien les termes de plus haut degré disparaissent dans P et dans Q, et l'on est dans le second cas; ou bien le terme de plus haut degré ne disparaît pas dans l'un, P par exemple; je démontre qu'alors on est dans le troisième cas.

Je divise Q' et P' par leur plus grand commun diviseur, s'il existe; l'identité (1) devient

$$PQ_1 - QP_1 = 0, \tag{2}$$

et P_1 et Q_1 sont premiers entre eux. P_1 divise PQ_1, il est premier avec Q_1 : donc il divise P. Soit δ le quotient qui est de degré au moins égal à 1, eu égard aux degrés de P et P_1 ; je supprime dans (2) le facteur P_1, il reste

$$\delta Q_1 - Q = 0 :$$

donc P et Q admettent le diviseur commun δ.

C. Q. F. D.

2. Pour évaluer le degré d'un déterminant D, je considère le cas où, dans chaque ligne, les degrés des éléments décroissent en progression arithmétique de raison r [1].

Je réduis chaque élément à son terme de plus haut

---

[1] Cette démonstration est tirée du cours de M. Crétin, professeur de Mathématiques spéciales au lycée Saint-Louis.

degré, et je dis que le nouveau déterminant D_1 est homogène. En effet, si je multiplie dans la deuxième ligne par y^r, dans la troisième par y^{2r}, et ainsi de suite, le polynôme D_1 est multiplié par une puissance de y; d'ailleurs il est homogène, puisque chaque ligne l'est; donc il l'était avant la multiplication.

Le polynôme D_1, s'il n'est pas nul, est le terme de plus haut degré de D.

Le même énoncé subsiste si les degrés dans chaque ligne croissent en progression arithmétique.

Toute équation algébrique a une racine.

3. Je traite d'abord le cas où le degré m est impair; le théorème est déjà démontré si l'équation est réelle : je la suppose donc imaginaire. Soit $P + iQ$ son premier membre, soit $f(x) = P^2 + Q^2$. Si $f(x)$ admet une racine, cette racine ou sa conjuguée appartient à $P + iQ$: il suffit donc de démontrer que l'équation réelle $f(x)$ de degré $m = 2p$, où p est impair, admet une racine.

A cet effet, je pose $x = y + z$, et je développe $f(y + z)$ en séparant les termes de degré pair, et les termes de degré impair en z,

$$f(y+z) = \frac{f_{(y)}^m}{m!} z^m + \frac{f_{(y)}^{m-2}}{(m-2)!} z^{m-2} + \ldots + f(y)$$
$$+ z\left[\frac{f_{(y)}^{m-1}}{(m-1)!} z^{m-2} + \ldots + f'(y)\right] = \varphi(z^2) + z\psi(z^2).$$

$\varphi(z^2)$ est en z^2 de degré $\frac{m}{2}$, son premier coefficient est une constante non nulle, que je suppose égale à 1; $\psi(z^2)$ est de degré $\frac{m}{2} - 1$ en z^2.

Je cherche à déterminer y de façon que φ et ψ aient un diviseur commun en z^2. Soit $\Delta(y)$ le résultant. Δ

est en y de degré $\frac{m(m-1)}{2}$ et a son premier coefficient non nul; en effet, on a

$$\Delta(y) = \begin{vmatrix} \frac{f^m}{m!} & \frac{f^{m-2}}{(m-2)!} & \cdots & f & 0 & . & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{f^m}{m!} & \cdots & . & f & . & \cdots & 0 \\ . & \cdots & \cdots & . & . & . & \cdots & . \\ 0 & \cdots & \cdots & \frac{f^m}{m!} & . & . & \cdots & f \\ \frac{f^{m-1}}{(m-1)!} & \cdot\cdot & \cdots & . & f' & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & . & . & . & \cdots & . \\ 0 & \cdots & \cdots & . & . & . & \cdots & f' \end{vmatrix}.$$

Les degrés des éléments dans chaque ligne sont, par rapport à y, en progression arithmétique de raison égale à 2; tous les termes du déterminant sont donc de même degré; je cherche le degré du terme principal ou de

$$(f^m)^{\frac{m}{2}-1}(f')^{\frac{m}{2}}:$$

ce degré est égal à $\frac{m(m-1)}{2}$.

Je forme le coefficient du terme de plus haut degré dans Δ; pour cela, je réduis chaque élément à son premier coefficient, ce qui donne le déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 & C_m^2 & C_m^4 & \cdots & C_m^m & 0 & . & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & \cdots & \cdots & C_m^m & 0 & \cdots & 0 \\ . & . & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & . & \cdots & . \\ 0 & . & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & . & \cdots & C_m^m \\ C_m^1 & . & \cdots & \cdots & C_m^{m-1} & 0 & . & \cdots & 0 \\ \cdots & . & \cdots & \cdots & \cdot\cdot & . & . & \cdots & . \\ 0 & . & \cdots & \cdots & \cdots & . & . & \cdots & C_m^{m-1} \end{vmatrix}.$$

Ce coefficient n'est pas nul, car c'est l'éliminant de x^2

entre deux polynômes U et V des degrés $\frac{m}{2}$, $\frac{m}{2} - 1$, en x^2,

$$U = \frac{1}{2}[(x+1)^m + (x-1)^m]$$

et

$$V = \frac{1}{2x}[(x+1)^m - (x-1)^m],$$

dont les degrés sont effectivement $\frac{m}{2}$ et $\frac{m}{2} - 1$, et qui n'admettent pas de diviseur commun, car un tel diviseur serait commun à $U + Vx$ et à $U - Vx$, c'est-à-dire à $(x+1)^m$ et à $(x-1)^m$, qui sont premiers entre eux.

Il résulte de ce qui précède que $\Delta(y)$, polynôme réel dont le degré est le nombre impair $\frac{m(m-1)}{2}$, admet une racine réelle. Pour cette valeur de y, ou bien ψ s'évanouit, ou bien φ et ψ ont un diviseur commun.

Dans le premier cas, $f(x)$ se réduit à $\varphi(z^2)$, qui est à coefficients réels et de degré impair en z^2; $\varphi(z^2)$ admet donc un diviseur réel du premier degré en z^2, et un diviseur du second degré en x, et, par suite, une racine.

Dans le second cas, où φ et ψ admettent un diviseur commun $\delta(z^2)$ dont le degré en z^2 est au moins 1, au plus $\frac{m}{2} - 1$, $f(x)$ est décomposé en un produit de deux facteurs de degrés moindres que m.

Si l'un de ces facteurs est de degré impair, il admet un diviseur réel du premier degré qui divise $f(x)$, sinon l'un des facteurs $f_1(x)$ est de degré $2p'$, p' étant un nombre impair, inférieur à p. Opérant sur $f_1(x)$ comme sur $f(x)$, on forme une suite limitée de diviseurs de $f(x)$ dont le dernier est ou de degré impair, ou de degré 2. Il admet une racine qui appartient à f; ce qui démontre le théorème.

Je considère maintenant une équation à coefficients réels ou imaginaires de degré m égal à $2^i p$, p étant impair. Pour abréger, je dirai que le nombre m est de parité i, et je vais démontrer que, si le théorème est établi pour les équations de parité inférieure à i, il est encore vrai pour une équation de parité i; il sera, dès lors, établi dans toute sa généralité, puisqu'il est vrai pour la parité o.

Soit $f(x)$ le premier membre de l'équation; je pose, comme ci-dessus,

$$x = y - z \quad \text{et} \quad f(x) = \varphi(z^2) + z\psi(z^2).$$

L'éliminant de z^2 entre φ et ψ est en y de degré $\frac{m(m-1)}{2}$ et de parité $(i-1)$; il s'annule donc pour une valeur réelle ou imaginaire de y.

En remarquant que $\varphi(z^2)$ est en z^2 de parité $(i-1)$, on prouvera, comme plus haut, que $f(x)$ admet un diviseur du second degré en x, ou un diviseur de parité moindre que i, et par suite une racine, ou enfin un diviseur de degré moindre que m et de parité i. Opérant sur ce diviseur comme sur $f(x)$, on forme une suite de diviseurs de $f(x)$, qui sont en nombre fini, puisque leurs degrés décroissent, et le dernier est de parité moindre que i, ou admet une racine, ce qu'il fallait démontrer.

4. La résolvante employée est l'équation aux demisommes des racines deux à deux.

A ce point de vue, la démonstration qui précède est très voisine de celle que Lagrange, sous le nom de Foncenex, a donnée en 1759 [1].

Lagrange classe, comme l'avait fait Euler, les équa-

---

[1] Voir LAGRANGE, *Équations numériques*, Notes IX et X.

tions d'après la parité de leur degré, puis il ramène la recherche d'un diviseur du second degré à la résolution de l'équation aux sommes des racines deux à deux.

La démonstration de Lagrange est insuffisante. De son temps, la question était mal posée, et la théorie des imaginaires n'était pas arrêtée comme elle l'est aujourd'hui. On savait qu'une équation de degré m peut être choisie de façon à avoir m racines réelles et à les conserver réelles pour une variation convenablement limitée des coefficients. On regardait ces racines comme pouvant être exprimées par des fonctions analytiques des coefficients, et ces fonctions étaient supposées vérifier encore l'équation, quand cette dernière cessait d'avoir toutes ses racines réelles. On appelait *impossibles* les racines ainsi dénaturées, et l'on se proposait de montrer qu'elles étaient de la forme $p+qi$. C'est ainsi que d'Alembert prend une racine réelle développée en série et cherche ce que devient ce développement quand la racine cesse d'être réelle. De même, Euler, Lagrange et Laplace admettent que les racines existent sous une forme qui les soumet au calcul algébrique, ce qui rend leurs démonstrations illusoires.

Gauss ([1]) (1799) condamne la conception des racines *impossibles* et propose quatre démonstrations. La première (1799), qu'il reproduira sous une forme peu différente (1849), est fondée sur des considérations de Géométrie de situation. La quatrième (1816) appartient au Calcul intégral. La deuxième (1815) seule est purement algébrique, mais elle est très compliquée par la nature et le procédé de formation de la résolvante.

Je passe sous silence d'autres démonstrations qui emploient la notion de continuité ailleurs que pour l'équa-

([1]) Gauss, *Werke*, t. III.

tion réelle de degré impair, et je mentionne enfin la démonstration de M. Gordan (*Mathematische Annalen*, 1876). M. Gordan rattache sa démonstration à celle de Gauss. La résolvante qu'il emploie est l'équation aux carrés des demi-différences. Cette résolvante se présente moins simplement que l'équation aux demi-sommes, et le degré n'y est pas aussi facile à reconnaître.