

MAURICE D'OCAGNE

**Note sur la transformation par semi-  
droites réciproques**

*Nouvelles annales de mathématiques* 3<sup>e</sup> série, tome 2  
(1883), p. 249-252

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1883\\_3\\_2\\_249\\_1](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1883_3_2_249_1)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1883, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

---

---

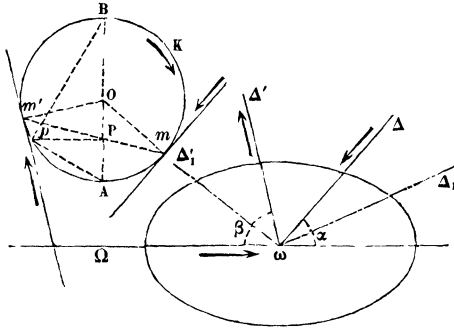
**NOTE SUR LA TRANSFORMATION PAR SEMI-DROITES  
RÉCIPROQUES;**

PAR M. MAURICE D'OCAGNE,  
Élève-Ingénieur des Ponts et Chaussées.

---

Considérons un couple de semi-droites réciproques  $\Delta$  et  $\Delta'$  se coupant en un point  $\omega$  de l'axe de transformation  $\Omega$ . Soit C une conique de centre  $\omega$ , ayant son grand axe dirigé suivant  $\Omega$ , et telle que le rapport  $\frac{b^2}{a^2}$  des carrés de ses demi-axes soit égal au rapport  $\frac{PA}{PB}$  des distances du

pôle P aux extrémités du diamètre AB du cycle K, qui passe par ce point; si Pp est perpendiculaire à AB,



$\frac{b}{a} = \frac{pA}{pB}$ . La conique C sera une ellipse ou une hyperbole, selon que le pôle P sera intérieur ou extérieur au cycle K.

Prenons la bissectrice  $\Delta_1$  des semi-droites  $\Delta$  et  $\Omega$ , et la bissectrice  $\Delta'_1$  des semi-droites  $\Delta'$  et  $\Omega$ .

Nous allons démontrer le théorème suivant :

**THÉORÈME.** — *Les semi-droites  $\Delta_1$  et  $\Delta'_1$  forment un couple de diamètres conjugués de la conique C.*

Menons, en effet, au cycle K les tangentes parallèles aux semi-droites réciproques  $\Delta$  et  $\Delta'$ ; tirons la corde des contacts  $mm'$  et les rayons  $Om$  et  $Om'$ . Nous avons

$$\widehat{AOm} = \alpha, \quad \widehat{AOm'} = \beta$$

et, par suite,

$$Pm = \frac{r \sin \alpha}{\sin P}, \quad Pm' = \frac{r \sin \beta}{\sin P}.$$

Donc

$$Pm \cdot Pm' = \frac{r^2 \sin \alpha \sin \beta}{\sin^2 P},$$

ou

$$\frac{\sin \alpha \sin \beta}{\sin^2 P} = \frac{Pm \cdot Pm'}{r^2}.$$

Or, d'après une propriété bien connue du cercle,

$$Pm.Pm' = PA \times PB;$$

d'ailleurs

$$\widehat{P} = \frac{\pi - (\beta - \alpha)}{2}.$$

L'égalité précédente pourra donc s'écrire

$$\frac{\sin \alpha \sin \beta}{\cos^2 \frac{\beta - \alpha}{2}} = \frac{PA \cdot PB}{r^2},$$

ou

$$\frac{\cos^2 \frac{\beta - \alpha}{2} - \cos^2 \frac{\beta + \alpha}{2}}{\cos^2 \frac{\beta - \alpha}{2}} = \frac{PA \cdot PB}{r^2},$$

ou encore

$$1 - \frac{\cos^2 \frac{\beta + \alpha}{2}}{\cos^2 \frac{\beta - \alpha}{2}} = \frac{PA \cdot PB}{r^2}.$$

Nous tirons de là

$$\frac{\cos^2 \frac{\beta + \alpha}{2}}{\cos^2 \frac{\beta - \alpha}{2}} = 1 - \frac{PA \cdot PB}{r^2} = \frac{r^2 - PA \cdot PB}{r^2} = \frac{\overline{OP}^2}{r^2},$$

ou

$$\frac{\cos \frac{\beta + \alpha}{2}}{\cos \frac{\beta - \alpha}{2}} = \frac{OP}{r}.$$

Par suite,

$$\frac{\cos \frac{\beta - \alpha}{2} - \cos \frac{\beta + \alpha}{2}}{\cos \frac{\beta - \alpha}{2} + \cos \frac{\beta + \alpha}{2}} = \frac{r - OP}{r + OP} = \frac{PA}{PB},$$

ou, après une transformation bien simple,

$$\operatorname{tang} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tang} \frac{\beta}{2} = \frac{PA}{PB} = \frac{b^2}{a^2}.$$

On aura donc aussi

$$\operatorname{tang} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tang} \left( \pi - \frac{\beta}{2} \right) = - \frac{b^2}{a^2},$$

ce qui démontre le théorème.

Les asymptotes de la conique C seront, d'après ce qui précède, les bissectrices des semi-droites qui se transforment en elles-mêmes et de l'axe  $\Omega$ .

La conique C est *caractéristique* de la transformation. Elle peut, à elle seule, la définir.

Nous pourrions dès lors énoncer le théorème précédent de la manière suivante :

*Deux semi-droites réciproques quelconques sont anti-symétriques de l'axe de transformation par rapport à deux diamètres conjugués de la conique caractéristique.*