NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

MAURICE D'OCAGNE

Sur l'enveloppe de certaines droites variables

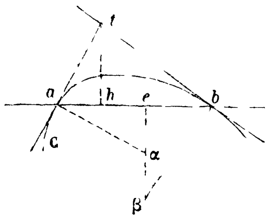
Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 2 (1883), p. 252-259

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1883_3_2__252_1>

SUR L'ENVELOPPE DE CERTAINES DROITES VARIABLES;

PAR M. MAURICE D'OCAGNE.

1. Soient, dans un plan, C une courbe fixe quelconque, ab une droite mobile coupant cette courbe aux



points a et b; les tangentes à la courbe C aux points a

et b se coupent au point t; la droite ab touche son enveloppe au point e; la droite $e\alpha\beta$ normale à cette enveloppe coupe en α et β les normales $a\alpha$ et $b\beta$ à la courbe C.

L'objet de la présente Note est la détermination du point e, lorsque la droite mobile est assujettie à certaines conditions remarquables.

Le segment de droite ab est de longueur constante.

2. On sait que, dans ce cas, rappelé ici à simple titre de mémoire, *le point e s'obtient en abaissant du point de rencontre de $a\alpha$ et $b\beta$ une perpendiculaire sur ab*. C'est une des propriétés fondamentales du centre instantané de rotation.

3. Si la courbe C se compose de deux droites concourantes, l'enveloppe de ab est une *épicycloïde à quatre points de rebroussement* (¹).

L'arc ab est de longueur constante.

4. Représentant par $d(a)$ et $d(b)$ les arcs infiniment petits correspondants décrits par les points a et b sur la courbe C, nous avons, en vertu d'un théorème connu,

$$\frac{d(a)}{d(b)} = \frac{at.ae}{bt.be},$$

et comme, dans ce cas, $d(a) = d(b)$,

$$\frac{ae}{be} = \frac{bt}{at},$$

d'où l'on conclut, pour la détermination du point e :

(¹) M. Mannheim a publié, dans les *Nouvelles Annales*, une étude géométrique de cette courbe (2ᵉ série, t. XVII, p. 321).

Théorème. — *Si t' est le symétrique du point t par rapport au milieu du segment ab, le point e se trouve sur la bissectrice de l'angle $at'b$.*

5. J'ai démontré ailleurs [1], par la simple Géométrie, que si, dans ce cas, la courbe C se compose de deux droites concourantes, l'enveloppe de la droite ab est une *parabole* tangente à ces deux droites et ayant pour axe leur bissectrice.

La somme de l'arc ab et du segment ab est constante.

6. On a, dans ce cas,

$$d(ab)+d(\text{arc}\,ab)=0,$$

ou

$$d(ab)+d(b)-d(a)=0.$$

Or

$$d(a)=d(b)\frac{ae.at}{be.bt},$$

et, en appelant $d\omega$ l'angle de deux positions infiniment voisines de ab,

$$d(ab)=\alpha\beta.d\omega,$$

ou, puisque, d'après un théorème connu, $d\omega=\dfrac{d(a)}{a\alpha}$,

$$d(ab)=\alpha\beta\cdot\frac{d(a)}{a\alpha}=\alpha\beta.d(b)\frac{ae.at}{be.bt}\,\frac{\sin tab}{ae}$$
$$=d(b)\frac{\alpha\beta.at}{be.bt}\sin tab.$$

L'équation différentielle écrite plus haut devient donc

$$d(b)\frac{\alpha\beta.at}{be.bt}\sin tab+d(b)-d(b)\frac{ae.at}{be.bt}=0,$$

ou

$$\alpha\beta.at\sin tab+be.bt-ae.at=0,$$

---

[1] *Journ. de Math. élém.*, t. IV, p. 160.

ou encore

$$\alpha\beta . th + be . bt - ae . at = 0.$$

Si l'on remarque que

$$\alpha\beta = be . \cot tba - ae . \cot tab,$$

l'équation précédente devient

$$be(th . \cot tba + bt) - ae(th \cot tab + at) = 0,$$

ou

$$\frac{be}{ae} = \frac{ah + at}{bh + bt}.$$

Cette expression permettrait de construire le point e, mais nous allons la transformer. En effet, elle peut s'écrire

$$\frac{be}{ae} = \frac{at(1 + \cos tab)}{bt(1 + \cos tba)} = \frac{at . \cos^2 \frac{tab}{2}}{bt . \cos^2 \frac{tba}{2}};$$

d'ailleurs

$$\frac{at}{bt} = \frac{\sin tba}{\sin tab} = \frac{\sin \frac{tba}{2} \cos \frac{tba}{2}}{\sin \frac{tab}{2} \cos \frac{tab}{2}};$$

donc

$$\frac{be}{ae} = \frac{\sin \frac{tba}{2} \cos \frac{tba}{2} \cos^2 \frac{tab}{2}}{\sin \frac{tab}{2} \cos \frac{tab}{2} \cos^2 \frac{tba}{2}} = \frac{\operatorname{tang} \frac{tba}{2}}{\operatorname{tang} \frac{tab}{2}},$$

expression qui se traduit immédiatement par l'énoncé suivant :

Théorème. — *Le point e est le point de contact sur ab du cercle exinscrit au triangle atb, situé dans l'angle atb.*

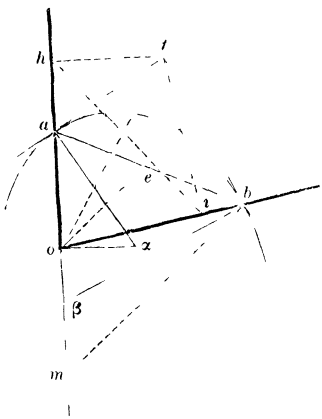
7. Il résulte de là que, si la courbe C se compose de deux droites concourantes, l'enveloppe de ab est un *cercle* tangent à ces deux droites.

Le segment ab est vu d'un point fixe sous un angle constant.

8. Soit o le point fixe. Nous avons

$$\frac{d(a)}{d(b)} = \frac{ae.at}{be.bt}.$$

La normale $a\alpha$ coupe en α la perpendiculaire $o\alpha$ à oa, c'est-à-dire la normale à l'enveloppe de oa, puisque cette



droite tourne autour du point o. De même, la normale $b\beta$ coupe en β la perpendiculaire $o\beta$ à ob; et l'on a

$$\frac{d(a)}{d(b)} = \frac{a\alpha}{b\beta}.$$

Par suite

$$\frac{at.ae}{bt.be} = \frac{a\alpha}{b\beta}$$

et

$$\frac{ae}{be} = \frac{a\alpha}{at}\,\frac{bt}{b\beta}.$$

Abaissons du point de rencontre t des tangentes les perpendiculaires th et ti sur ao et bo; les triangles $ao\alpha$ et tha sont semblables, ainsi que $bo\beta$ et tib; donc

$$\frac{a\alpha}{at} = \frac{ao}{th}, \quad \frac{bt}{b\beta} = \frac{ti}{bo},$$

et, par suite,

$$\frac{ae}{be} = \frac{ao.ti}{th.bo}.$$

Tirons bm parallèle à oe; nous avons

$$\frac{ae}{be} = \frac{ao}{mo};$$

donc

$$\frac{ao}{mo} = \frac{ao.ti}{th.bo},$$

ou

$$\frac{bo}{mo} = \frac{ti}{th},$$

égalité qui fait voir, en remarquant que les angles $\widehat{hti}$ et $\widehat{bom}$ sont égaux comme ayant leurs côtés perpendiculaires, que les triangles thi et omb sont semblables; et comme les côtés homologues th et mo, d'une part, ti et bo, de l'autre, sont perpendiculaires, il en résulte que hi est perpendiculaire à mb et, par suite, à oe.

On aura donc le point e cherché, *en projetant le point de rencontre t des tangentes en h et en i sur les côtés oa et ob de l'angle constant et en abaissant du point o une perpendiculaire sur la droite hi.*

Mais cette construction peut être simplifiée. En effet, tirons la droite ot; le quadrilatère $ohti$ est inscriptible, puisque ses angles en h et en i sont droits; par suite, $\widehat{hot} = \widehat{hit}$; mais $\widehat{hit} = \widehat{ioe}$, comme ayant leurs côtés perpendiculaires; donc $\widehat{hot} = \widehat{hit}$.

On aura donc encore le point e, *en faisant l'angle* $\widehat{boe}$ *égal à l'angle* $\widehat{toa}$.

9. Application. — *Dans une ellipse, une corde ab est constamment vue du centre o sous un angle droit; quelle est l'enveloppe de cette corde?*

La droite ot coupe ab en son milieu; elle est donc médiane du triangle aob, et, comme ce triangle est rectangle en o, $\widehat{toa} = \widehat{bao}$; si e est le point où ab touche son enveloppe, on a, d'après ce qui précède, $\widehat{aoe} = \widehat{toa}$; donc $\widehat{aoe} = \widehat{bao}$; et, comme ob est perpendiculaire à oa, oe sera perpendiculaire à ab; la normale oe à l'enveloppe de ab passant par le point fixe o, cette enveloppe est un cercle ayant ce point pour centre.

Les tangentes a l'extrémité de l'arc ab font entre elles un angle constant.

10. On a toujours

$$\frac{d(a)}{d(b)} = \frac{ae.at}{bc.bt}.$$

D'ailleurs, si R et R′ sont les rayons de courbure en a et b, $d\theta$ et $d\theta'$ les angles de contingence en ces points, on a

$$d(a) = \mathrm{R}\,d\theta, \quad d(b) = \mathrm{R}'d\theta'.$$

Mais, puisque $\widehat{atb}$ est constant, $d\theta = d\theta'$: donc

$$\frac{d(a)}{d(b)} = \frac{\mathrm{R}}{\mathrm{R}'};$$

par suite,

$$\frac{ae.at}{be.bt} = \frac{\mathrm{R}}{\mathrm{R}'}.$$

Appelons α et β les centres de courbure en a et b, o un point tel que les rayons $a\alpha$ et $b\beta$ soient vus de ce point sous des angles droits; nous retomberons alors sur la même figure que pour la question précédente, avec les mêmes relations, et nous arriverons, par conséquent, au même résultat.

Donc, le point o étant défini ainsi qu'il vient d'être dit, on aura le point e où ab touche son enveloppe *en faisant* $\widehat{aoe} = \widehat{tob}$.

Dans le cas particulier des coniques, ce problème donne lieu à un théorème plus intéressant, qui rentre dans le cadre d'un travail plus étendu que nous publierons prochainement dans les *Nouvelles Annales*.