

G. FOURET

**Recherche d'une courbe plane
possédant un lieu géométrique de pôles
principaux d'inversion**

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 2
(1883), p. 259-262

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1883_3_2_259_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1883, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

**RECHERCHE D'UNE COURBE PLANE POSSÉDANT UN LIEU
GÉOMÉTRIQUE DE POLES PRINCIPAUX D'INVERSION ;**

PAR M. G. FOURET,

Répétiteur à l'École Polytechnique.

On sait qu'il est possible, d'une infinité de manières, de transformer en elle-même par *inversion* une circonférence de cercle, en prenant comme pôles de transformation les divers points du plan de cette circonférence. On peut énoncer cette propriété en disant que la circonférence de cercle a pour *pôles principaux d'inversion* tous les points de son plan.

Il existe, d'autre part, des courbes planes appelées *anallagmatiques*, qui ont la propriété de se transformer en elles-mêmes par inversion, à l'aide d'un ou de plusieurs points de leur plan pris pour pôles de transfor-

mation. Les plus remarquables dans ce genre sont les *anallagmatiques* des troisième et quatrième ordres, qui possèdent, en général, quatre pôles principaux d'inversion. Il existe même des anallagmatiques planes qui ont une infinité de pôles principaux d'inversion distribués le long d'une certaine ligne : on obtient une pareille courbe en transformant par rayons vecteurs réciproques une courbe douée d'une infinité d'axes de symétrie.

N'y aurait-il pas, tenant le milieu entre le cercle et les courbes que nous venons de rappeler, une catégorie d'anallagmatiques planes possédant une infinité de pôles principaux d'inversion qui se succéderaient d'une manière continue, de manière à avoir pour lieu géométrique une ligne droite ou courbe. Telle est la question que nous allons résoudre. Nous nous appuierons, pour cela, sur une propriété bien connue de l'inversion, qui peut s'énoncer de la manière suivante :

En deux points correspondants de deux branches de courbes inverses, les tangentes à ces branches de courbes font avec le rayon vecteur commun qui aboutit au pôle d'inversion des angles correspondants ⁽¹⁾ supplémentaires.

Supposons qu'il existe une courbe plane anallagmatique (C) douée d'une infinité de pôles principaux d'inversion formant un lieu géométrique (L) ⁽²⁾. Soit O un point pris arbitrairement sur (C). Par O faisons passer une droite quelconque rencontrant (L) en P. Ce point P étant, par hypothèse, un pôle principal d'inversion de (C), il existe, à l'intersection de PO et de (C), un se-

⁽¹⁾ L'expression d'*angle correspondant* a ici le même sens qu'en Géométrie élémentaire.

⁽²⁾ Le lecteur est prié de faire la figure.

cond point M inverse de O par rapport à P, et tel, par suite de la propriété rappelée plus haut, que les angles *correspondants* formés par le rayon vecteur PO avec les tangentes à (C) en O et en M soient supplémentaires.

Cela posé, rapportons la courbe (C) à un système de coordonnées polaires ayant pour pôle le point O, et pour axe polaire la tangente OX en ce point à la courbe (C).

Posons

$$OM = \rho \quad \text{et} \quad \widehat{MOX} = \omega.$$

En vertu de la remarque précédente, il y a égalité entre l'angle ω et l'angle V formé par le prolongement du rayon vecteur OM avec la tangente MT à (C), dirigée dans le sens où ω croît. Or, d'après une formule bien connue, on a

$$\text{tang V} = \frac{\rho'}{\rho}.$$

Par suite

$$\frac{\rho'}{\rho} = \frac{1}{\text{tang } \omega},$$

d'où l'on conclut, en intégrant,

$$\rho = a \sin \omega,$$

a étant une constante arbitraire.

L'équation ainsi trouvée est celle d'une circonférence tangente en O à l'axe polaire OX. Quant au lieu (L), il reste indéterminé, ou, autrement dit, il comprend tous les points du plan. Nous arrivons ainsi aux conclusions suivantes :

1° *Il n'existe pas de courbe anallagmatique plane qui possède une infinité de pôles principaux d'inversion ayant pour lieu géométrique une ligne droite ou courbe.*

2° *La circonférence de cercle est la seule courbe*

plane qui se transforme en elle-même par inversion, à l'aide d'un point quelconque de son plan pris pour pôle de transformation.

En remarquant que la sphère est la seule surface dont toutes les sections planes soient des circonférences, on déduit de ce qui précède les résultats suivants :

3° *Il n'existe pas de surface anallagmatique qui possède une infinité de pôles principaux d'inversion ayant pour lieu géométrique une surface.*

4° *La sphère est la seule surface qui se transforme en elle-même par inversion, quel que soit le point que l'on prenne pour pôle de transformation.*

Il est bon de remarquer qu'il existe des surfaces analagmatiques dont les pôles principaux en nombre infini ont pour lieu géométrique une ligne droite ou courbe. Deux surfaces bien connues sont dans ce cas : le tore a pour pôles principaux d'inversion tous les points de son axe; la cyclide de Dupin a pour pôles principaux d'inversion tous les points d'une certaine circonférence.
