S. RÉALIS

Sur une équation indéterminée

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 2 (1883), p. 289-297

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1883_3_2__289_0>

SUR UNE ÉQUATION INDÉTERMINÉE;

PAR M. S. RÉALIS,
Ingénieur à Turin.

1. La résolution, en nombres entiers, de l'équation indéterminée

$$x^3 + k = y^2 \tag{1}$$

a été, depuis Fermat, l'objet d'intéressantes études de la part de différents géomètres, Euler en tête. Nous en tenant d'abord à la contribution fournie par les *Nouvelles Annales,* nous citerons ici, après le théorème énoncé par M. Catalan dans le premier volume de la Collection, p. 520, les remarquables articles insérés tour à tour par Le Besgue (1re série, t. IX, p. 178; 2e série, t. VIII, p. 452), par M. Gerono (2e série, t. VIII, p. 454 et 559; t. IX, p. 469; t. X, p. 204; t. XVI, p. 325), par M. E. de Jonquières (2e série, t. XVII, p. 374 et 514).

Les conclusions de ces articles se rapportent surtout à des cas d'impossibilité de l'équation considérée, ou à des limitations auxquelles elle est soumise pour des valeurs particulières de l'entier donné k. Mais la question n'en est pas moins intéressante quand on l'envisage au point de vue de la résolution de l'équation. C'est sur quoi nous allons présenter quelques indications, fort incomplètes sans doute, mais qui pourront mettre sur la voie de recherches ultérieures. Quelques propriétés des nombres, dignes d'être signalées, se présenteront d'elles-mêmes comme conséquences immédiates des formules posées.

2. Il est facile d'abord d'établir des relations d'iden-

tité propres à vérifier l'équation (1) pour certaines valeurs de k.

Ainsi l'égalité très simple

$$(2) \qquad (a^2 - 2b)^3 + b^2(8b - 3a^2) = (a^3 - 3ab)^2,$$

où b peut être changé en $-b$, donne directement une solution dans le cas assez étendu de $k = b^2(\pm 8b - 3a^2)$. Par exemple :

$$2^3 - 4 = 2^2, \quad -1^3 + 5 = 2^2, \quad 3^3 - 11 = 4^2,$$
$$7^3 - 19 = 18^2, \quad -3^3 + 52 = 5^2, \quad \ldots.$$

Le résultat particulier

$$(a^2 \mp 2)^3 - (3a^2 \mp 8) = (a^3 \mp 3a)^2,$$

pour le remarquer en passant, met en évidence que *tout nombre de l'une des formes* $3a^2 \mp 8$ *est la différence entre un cube et un carré*. On exclut, dans le cas des signes supérieurs, l'hypothèse de $a = 1$, qui conduit à l'égalité $-5 = -1^3 - 2^2$, c'est-à-dire $5 = 1^3 + 2^2$.

La même égalité (2), en y changeant a en $2a$, et b en $\frac{b}{2}$, se change en la transformée

$$(4a^2 - b)^3 + b^2(b - 3a^2) = (8a^3 - 3ab)^2,$$

par où l'on satisfait à (1) lorsque $k = b^2(\pm b - 3a^2)$. Par exemple,

$$3^3 - 2 = 5^2, \quad 5^3 - 4 = 11^2, \quad 6^3 - 20 = 14^2,$$
$$7^3 - 54 = 17^2, \quad 13^3 - 81 = 46^2, \quad \ldots.$$

Cette transformée s'exprime aussi par la relation équivalente

$$(a^2 + b)^3 - b(3a^2 - b)^2 = (a^3 - 3ab)^2,$$

où b peut être positif ou négatif.

Les résultats particuliers

$$(4a^2 \mp 1)^3 - (3a^2 \mp 1) = (8a^3 \mp 3a)^2.$$
$$(a^2 \mp 1)^3 \pm (3a^2 \pm 1)^2 = (a^3 \pm 3a)^2$$

nous font reconnaître incidemment que :

1° *Tout nombre de l'une des formes* $3a^2 \mp 1$, *ainsi que tout carré de la forme* $(3a^2 - 1)^2$, *est la différence entre un cube et un carré;*

2° *Tout carré* $(3a^2 + 1)^2$, *à l'exception de* 16, *est la différence entre un carré et un cube.*

On observera, à l'égard de cette dernière proposition, que lorsque $a = 0$, la formule donne le résultat insignifiant $1^2 = 0 + 1^3$; mais alors on a $1^2 = 3^2 - 2^3$.

3. L'identité (2) rentre, du reste, dans la formule

$$(p^2 + kq^2)^3 - kq^2(3p^2 - kq^2)^2 = (p^3 - 3kpq^2)^2,$$

assignée par Euler pour la résolution, en entiers, de l'équation $x^3 - kz^2 = y^2$. Faisant $q = 1$, ce qui ne restreint pas la généralité de la relation algébrique, on a effectivement la transformée ci-dessus de l'identité (2).

Nous ne devons pas omettre de rappeler ici l'important Mémoire : *Sur certains nombres complexes compris dans la formule* $a + b\sqrt{-c}$, inséré par le P. Pepin dans le *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 3e série, t. I, p. 317. Dans cet écrit, le savant auteur reproduit et étend considérablement plusieurs recherches d'Euler, Legendre et autres géomètres, sur des questions d'Analyse indéterminée. Les équations [entre autres, différents cas particuliers de l'équation (1) par nous considérée] y sont traitées au double point de vue de la résolution, quand elle est possible, et de l'indication des cas d'impossibilité ou de limitation.

4. L'identité

$$(3)\quad \left(\frac{9\alpha^4-8\alpha\beta^2}{4\beta^2}\right)^3+\beta^2-\alpha^3=\left(\frac{27\alpha^6-36\alpha^3\beta^2+8\beta^4}{8\beta^3}\right)^2,$$

que l'on obtient par un procédé indiqué dans l'*Analyse indéterminée* d'Euler (Chap. VIII), mérite d'être signalée; elle sert à amener une nouvelle solution de (1) (et, par suite, une infinité de solutions), à l'aide d'une solution préalable $\alpha^3+k=\beta^2$, supposée connue.

Pour des valeurs entières ou rationnelles de α, β, les solutions fournies par cette formule se trouveront généralement exprimées en nombres rationnels x, y. Par exemple, l'équation $x^3+8=y^2$ étant vérifiée par les valeurs $x=1, y=3$, nous assignerons ces valeurs à α et β, dans l'identité (3), et il en résultera la nouvelle solution, en nombres rationnels,

$$\left(-\frac{7}{4}\right)^3+8=\left(\frac{13}{8}\right)^2.$$

En certains cas, une solution entière en amène une autre de même nature. Par exemple, pour $\alpha=2h\gamma$, $\beta=2\gamma$, valeurs de x et y constituant une solution entière de l'équation

$$x^3-4\gamma^2(2h^3\gamma-1)=y^2;$$

la formule (3) fait connaître la nouvelle solution entière

$$[h\gamma(9h^3\gamma-4)]^3-4\gamma^2(2h^3\gamma-1)=(27h^6\gamma^3-18h^3\gamma^2+2\gamma)^2.$$

Le resultat particulier

$$(9\gamma^2\pm4\gamma)^3\pm4\gamma^2(2\gamma\pm1)=(27\gamma^3\pm18\gamma^2+2\gamma)^2$$

nous conduit à remarquer, incidemment, que :

1° *La somme du carré et du cube de tout nombre pair peut s'exprimer par la différence entre un carré et un cube;*

2° *La différence entre le cube et le carré d'un même nombre pair peut s'exprimer par la différence entre le cube et le carré de deux nombres entiers inégaux.*

5. Dans le cas de $\alpha = 2h\beta$, d'où $k = \beta^2(1 - 8h^3\beta)$, l'identité (3) devient

$$[4h\beta(9h^3\beta - 1)]^3 + \beta^2(1 - 8h^3\beta) = (6^3h^6\beta^3 - 6^2h^3\beta^2 + \beta)^2.$$

Dans le cas de $\alpha = 2h\gamma$, $\beta = 3\gamma$, on obtient

$$[4h\gamma(h^3\gamma - 1)]^3 + \gamma^2(9 - 8h^3\gamma) = (8h^6\gamma^3 - 12h^3\gamma^2 + 3\gamma)^2.$$

Dans le cas, enfin, de $\alpha = -2h\gamma$, $\beta = \gamma^2$, l'identité (3) nous donne

$$[4h(\gamma + 9h^3)]^3 + \gamma^3(\gamma + 8h^3) = (\gamma^2 + 6^2h^3\gamma + 6^3h^6)^2.$$

Attribuant, dans ces formules, des valeurs entières à h, β, γ, on trouve des valeurs entières de x, y, k, satisfaisant à l'équation (1).

6. Nous remarquerons ici que, pour certaines valeurs de k, on peut assigner immédiatement deux, et même trois, solutions entières de l'équation (1).

On vérifie, par exemple, l'équation

$$x^3 + 4a^2(a^2 + 1) = y^2,$$

soit en prenant $x = 2a$, $y = 2a(a + 1)$, soit en prenant $x = -2a$, $y = 2a(a - 1)$.

L'équation

$$x^3 + 4(a^2 + a)^2 + 1 = y^2,$$

où a peut être positif ou négatif, admet de même les deux solutions immédiates

$$\begin{cases} x = 2(a+1), \\ y = 2(a+1)^2 + 1, \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -2a, \\ y = 2a^2 + 1, \end{cases}$$

en outre de la solution évidente $x = -1$, $y = 2(a^2 + a)$.

Pour l'équation

$$x^3 + 4a^3(9a+2) = y^2,$$

les solutions immédiates sont $x = -2a$, $y = 6a^2$, et $x = 4a+1$, $y = 6a^2 + 6a + 1$.

Pour l'équation

$$x^3 + \left(\frac{a^2+a}{2}\right)^2 = y^2,$$

on a les deux solutions

$$\begin{cases} x = a+1, \\ y = \dfrac{(a+1)(a+2)}{2}, \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -a, \\ y = \dfrac{(a-1)a}{2}, \end{cases}$$

d'où cette propriété, que *le carré d'un nombre triangulaire est, en même temps, la somme d'un carré et d'un cube, et la différence entre un carré et un cube.*

Pour

$$x^3 + \left(\frac{a^2+a}{2}\right)^2 + 8 = y^2,$$

on a

$$\begin{cases} x = -(a-1), \\ y = \dfrac{a^2-a+6}{2}, \end{cases} \qquad \begin{cases} x = a+2, \\ y = \dfrac{a^2+3a+8}{2}, \end{cases}$$

en outre de la solution évidente $x = -2$, $y = \dfrac{a^2+a}{2}$.

Citons, comme dernier exemple, l'équation

$$x^3 + \frac{a^2(9a^2+14a+9)}{4} = y^2,$$

à laquelle on satisfait par les trois systèmes de valeurs de x et y :

$$\begin{cases} x = a, \\ y = \dfrac{3(a^2+a)}{2}, \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -2a, \\ y = \dfrac{3(a^2-a)}{2}, \end{cases} \qquad \begin{cases} x = a+1, \\ y = \dfrac{3a^2+3a+2}{2}. \end{cases}$$

7. Des résultats qui viennent d'être exposés découlent,

relativement à l'équation (1), des conséquences importantes sur lesquelles nous ne nous arrêterons pas en ce moment. Signalons seulement, en terminant, les propositions qui suivent, assez curieuses au point de vue de la théorie des nombres.

1° *Le double carré de tout nombre entier est égal, d'une infinité de manières, à la différence entre une somme de deux carrés et une somme de deux cubes.*

C'est une conséquence de l'identité

$$[4h\beta(9h^3\beta-1)]^3+[4h\beta(9h^3\beta+1)]^3+2\beta^2$$
$$=(6^3h^6\beta^3-6^2h^3\beta^2+\beta)^2+(6^3h^6\beta^3+6^2h^3\beta^2+\beta)^2.$$

Ainsi, pour $\beta=1$,

$$2.1^2=(181^2+253^2)-(32^3+40^3),$$
$$2.1^2=(13537^2+14113^2)-(568^3+584^3),$$
. . . .

La même identité, où $\beta=1$, pouvant être mise sous la forme

$$4^3(3h^2)^3[(3h^2)^3+1^3]+1=(6^3h^6+1)^2+(6^2h^3)^2,$$

nous apprend encore que :

2° *L'unité peut être représentée, d'une infinité de manières, soit en nombres entiers, soit en nombres rationnels, par la différence entre une somme de deux carrés et une somme de deux cubes.*

Ainsi,

$$1=(217^2+36^2)-(36^3+12^3),$$
$$1=\left[\left(\frac{35}{27}\right)^2+\left(\frac{4}{3}\right)^2\right]-\left[\left(\frac{4}{9}\right)^3+\left(\frac{4}{3}\right)^3\right],$$
. . . .

Des deux formules

$$6a^2b^2 = [(4a^2 - b)^3 + (4a^2 + b)^3] - [(8a^3 - 3ab)^2 + (8a^3 + 3ab)^2],$$

$$6a^2b^2 = [(a^2 - 2b)^3 + (a^2 + 2b)^3] - [(a^3 - 3ab)^2 + (a^3 + 3ab)^2],$$

lesquelles se déduisent de (2), et auxquelles on peut joindre des résultats particuliers, tels que

$$6(a^3)^2 = [(2a^2)^3 + (2a^2)^3] - [(a^3)^2 + (3a^3)^2],$$

$$6(a^3)^2 = [(2a^2)^3 + (3a^2)^3] - [(2a^3)^2 + (5a^3)^2],$$

....,

il résulte que :

3° *Le sextuple d'un carré peut toujours s'exprimer, au moins de deux manières différentes, par une somme de deux cubes, diminuée d'une somme de deux carrés.*

Exemples :

$$6.1^2 = (2^3 + 2^3) - (1^2 + 3^2) = (3^3 + 5^3) - (5^2 + 11^2),$$

$$6.2^2 = (2^3 + 6^3) - (2^2 + 14^2) = (15^3 + 17^3) - (58^2 + 70^2),$$

$$6.3^2 = (7^3 + 11^3) - (18^2 + 36^2) = \ldots\ldots\ldots\ldots,$$

....

4° *Le triple carré d'un nombre pair plus grand que 2 est égal à la différence entre une somme de deux carrés et une somme de deux cubes.*

C'est ce qui résulte de la formule

$$3(2ab)^2 = [(a^3 - 3ab)^2 + (a^3 + 3ab)^2] - [(a^2 - b)^3 + (a^2 + b)^3],$$

où l'on voit de plus que, si ab n'est pas un nombre premier, la décomposition indiquée pourra s'effectuer au moins de deux manières différentes. Ainsi :

$$3.12^2 = (10^2 + 26^2) - (1^3 + 7^3),$$

$$3.12^2 = (9^2 + 45^2) - (7^3 + 11^3),$$

$$3.12^2 = (198^2 + 234^2) - (35^3 + 37^3).$$

Enfin, des deux premières formules du n° 5, où l'on fera $\beta + \gamma = 0$ après les avoir ajoutées ensemble, il résulte que :

5° *Le décuple d'un carré peut être représenté, d'une infinité de manières, par une somme de deux carrés, diminuée d'une somme de deux cubes.*

On trouve, par exemple, dans le cas où le carré considéré est égal à l'unité :

$$
\begin{aligned}
10.1^2 &= (181^2 + 23^2) - (32^3 + 8^3),\\
10.1^2 &= (13537^2 + 611^2) - (568^3 + 72^3),\\
10.1^2 &= (14113^2 + 419^2) - (584^3 + 56^3),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}
$$

à quoi viennent s'ajouter les égalités que l'on obtient par d'autres moyens, telles que :

$$
\begin{aligned}
10.1^2 &= (5^2 + 1^2) - (2^3 + 2^3),\\
10.1^2 &= (16^2 + 2^2) - (5^3 + 5^3),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

Il est bon d'observer que, dans les différentes décompositions qui viennent d'être indiquées, on peut admettre qu'*aucun des carrés ne se réduit à zéro, tous les cubes sont plus grands que zéro.*