Nouvelles annales de mathématiques

Goffart

Théorème de géométrie

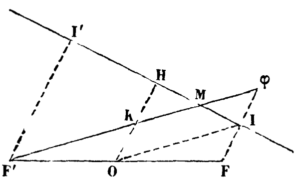
Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 2 (1883), p. 353-354

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1883_3_2__353_0>

THEORÈME DE GÉOMÉTRIE;

Par M. GOFFART.

Soient F, F′ les foyers d'une ellipse; II′ une tangente. Pour déterminer le point de contact, il suffit de prendre le symétrique φ du foyer F par rapport à cette tangente,



puis de mener la droite $F'\varphi$ qui coupe II′ au point cherché.

Les points O et I étant les milieux de FF′ et de $F\varphi$, on a OI parallèle à KM. Donc

$$\mathrm{MH.HO = HI.HK}.$$

Or, en désignant par α l'angle HOF, on a

$$\mathrm{IH = OF}\sin\alpha,\quad \mathrm{HK} = \frac{\mathrm{F'I'} - \varphi\mathrm{I}}{2} = \frac{\mathrm{F'I'-FI}}{2} = \mathrm{FF'}\cos\alpha,$$

ou

$$\mathrm{IH} = c\sin\alpha,\quad \mathrm{HK} = 2c\cos\alpha,$$

en sorte que

$$(1)\qquad \mathrm{MH.HO} = c^2\sin 2\alpha.$$

Si donc on considère toutes les ellipses de foyers F et F′, tangentes à toutes les droites parallèles à II′, le lieu des points de contact M sera défini par la relation (1). Et si l'on prend pour axes OM et une perpendiculaire à OM, on reconnaît immédiatement que cette relation caractérise l'hyperbole équilatère. Donc :

Le lieu des points de contact de toutes les ellipses qui ont les mêmes foyers avec toutes les droites parallèles à une direction donnée est une hyperbole équilatère concentrique aux ellipses, qui a pour asymptotes la direction donnée et la direction perpendiculaire, et qui passe par les foyers donnés.