

GEORGES DOSTOR

Distances du centre de gravité aux points remarquables du triangle

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 2 (1883), p. 368-370

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1883_3_2_368_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1883, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

**DISTANCES DU CENTRE DE GRAVITÉ AUX POINTS
REMARQUABLES DU TRIANGLE ;**

PAR M. GEORGES DOSTOR.

1. Nous désignerons par A, B, C les trois sommets d'un triangle et par a , b , c les longueurs des côtés respectivement opposés à ces sommets.

Représentons par R le rayon du cercle circonscrit; par r, r', r'', r''' les rayons des cercles, dont le premier est inscrit et les autres exinscrits au triangle.

Supposons que la lettre G soit mise au centre de gravité du triangle et la lettre O au centre du cercle circonscrit. Portons les lettres I, I', I'', I''' aux centres des cercles, l'un inscrit et les autres exinscrits. Enfin plaçons la lettre H au point de concours des hauteurs.

2. Les distances du centre de gravité G aux trois sommets A, B, C ont pour carrés respectifs, comme l'on sait, les expressions

$$\overline{GA}^2 = \frac{1}{9}(2b^2 + 2c^2 - a^2),$$

$$\overline{GB}^2 = \frac{1}{9}(2c^2 + 2a^2 - b^2),$$

$$\overline{GC}^2 = \frac{1}{9}(2a^2 + 2b^2 - c^2),$$

qui donnent

$$\overline{GA}^2 + \overline{GB}^2 + \overline{GC}^2 = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2).$$

3. La distance du centre de gravité G au centre O du cercle circonscrit est donnée par

$$\overline{GO}^2 = 4R^2 - \frac{1}{9}(a^2 + b^2 + c^2).$$

On en déduit de suite la distance du centre de gravité G au point de concours H des hauteurs, dont le carré est ainsi

$$\overline{GH}^2 = 4R^2 - \frac{4}{9}(a^2 + b^2 + c^2).$$

4. Enfin on trouve facilement que le carré de la droite qui joint le centre de gravité G au centre I du cercle

inscrit a pour valeur

$$\overline{GI}^2 = \frac{1}{3}(bc + ca + ab) - \frac{1}{9}(a^2 + b^2 + c^2) - 4Rr.$$

Dans cette expression, il suffira de changer le signe de a et de remplacer r par $-r'$, pour avoir la distance qui correspond au centre du cercle exinscrit, opposé à l'angle A .

On trouve ainsi que

$$\overline{GI'}^2 = \frac{1}{3}(bc - ca - ab) - \frac{1}{9}(a^2 + b^2 + c^2) + 4Rr',$$

$$\overline{GI''}^2 = \frac{1}{3}(ca - ab - bc) - \frac{1}{9}(a^2 + b^2 + c^2) + 4Rr'',$$

$$\overline{GI'''}^2 = \frac{1}{3}(ab - bc - ca) - \frac{1}{9}(a^2 + b^2 + c^2) + 4Rr''.$$

Ces quatre dernières égalités donnent

$$\begin{aligned} \overline{GI}^2 + \overline{GI'}^2 + \overline{GI''}^2 + \overline{GI'''}^2 &= 4R(r' + r'' + r''' - r) - \frac{4}{9}(a^2 + b^2 + c^2) \\ &= 16R^2 - \frac{4}{9}(a^2 + b^2 + c^2) \\ &= 12R^2 + 4\overline{GO}^2. \end{aligned}$$

§. Toutes ces formules peuvent s'obtenir directement par la Géométrie pure; on peut aussi les calculer au moyen de la Trigonométrie.