NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

GEORGES DOSTOR

Distances du centre de gravité aux points remarquables du triangle

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 2 (1883), p. 368-370

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1883_3_2__368_1>

DISTANCES DU CENTRE DE GRAVITÉ AUX POINTS REMARQUABLES DU TRIANGLE;

PAR M. GEORGES DOSTOR.

1. Nous désignerons par A, B, C les trois sommets d'un triangle et par a, b, c les longueurs des côtés respectivement opposés à ces sommets.

Représentons par R le rayon du cercle circonscrit; par r, r', r'', r''' les rayons des cercles, dont le premier est inscrit et les autres exinscrits au triangle.

Supposons que la lettre G soit mise au centre de gravité du triangle et la lettre O au centre du cercle circonscrit. Portons les lettres I, I′, I″, I‴ aux centres des cercles, l'un inscrit et les autres exinscrits. Enfin plaçons la lettre H au point de concours des hauteurs.

2. Les *distances du centre de gravité* G *aux trois sommets* A, B, C ont pour carrés respectifs, comme l'on sait, les expressions

$$\overline{GA}^2 = \frac{1}{9}(2b^2 + 2c^2 - a^2),$$

$$\overline{GB}^2 = \frac{1}{9}(2c^2 + 2a^2 - b^2),$$

$$\overline{GC}^2 = \frac{1}{9}(2a^2 + 2b^2 - c^2),$$

qui donnent

$$\overline{GA}^2 + \overline{GB}^2 + \overline{GC}^2 = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2).$$

3. La *distance du centre de gravité* G *au centre* O *du cercle circonscrit* est donnée par

$$\overline{GO}^2 = 4R^2 - \frac{1}{9}(a^2 + b^2 + c^2).$$

On en déduit de suite la *distance du centre de gravité* G *au point de concours* H *des hauteurs*, dont le carré est ainsi

$$\overline{GH}^2 = 4R^2 - \frac{4}{9}(a^2 + b^2 + c^2).$$

4. Enfin on trouve facilement que le carré de *la droite qui joint le centre de gravité* G *au centre* I *du cercle*

inscrit a pour valeur

$$\overline{\mathrm{GI}}^2 = \frac{1}{3}(bc + ca + ab) - \frac{1}{9}(a^2 + b^2 + c^2) - 4\,\mathrm{R}\,r.$$

Dans cette expression, il suffira de changer le signe de a et de remplacer r par $-r'$, pour avoir la distance qui correspond au centre du cercle exinscrit, opposé à l'angle A.

On trouve ainsi que

$$\overline{\mathrm{GI}'}^2 = \frac{1}{3}(bc - ca - ab) - \frac{1}{9}(a^2 + b^2 + c^2) + 4\,\mathrm{R}r',$$

$$\overline{\mathrm{GI}''}^2 = \frac{1}{3}(ca - ab - bc) - \frac{1}{9}(a^2 + b^2 + c^2) + 4\,\mathrm{R}r'',$$

$$\overline{\mathrm{GI}'''}^2 = \frac{1}{3}(ab - bc - ca) - \frac{1}{9}(a^2 + b^2 + c^2) + 4\,\mathrm{R}r'''.$$

Ces quatre dernières égalités donnent

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{GI}}^2 + \overline{\mathrm{GI}'}^2 + \overline{\mathrm{GI}''}^2 + \overline{\mathrm{GI}'''}^2 &= 4\,\mathrm{R}(r' + r'' + r''' - r) - \frac{4}{9}(a^2 + b^2 + c^2)\\ &= 16\,\mathrm{R}^2 - \frac{4}{9}(a^2 + b^2 + c^2)\\ &= 12\,\mathrm{R}^2 + 4\,\overline{\mathrm{GO}}^2.\end{aligned}$$

5. Toutes ces formules peuvent s'obtenir directement par la Géométrie pure; on peut aussi les calculer au moyen de la Trigonométrie.