NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Solutions de questions proposées dans les Nouvelles annales

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 2 (1883), p. 372-381
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1883_3_2__372_1>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 1281

(voir 2ᵉ série, t. XVII, p. 384);

PAR M. E. FAUQUEMBERGUE,
Professeur au lycée de Nice.

L'équation

$$(2+\sqrt{3})^{2x+1}+(2-\sqrt{3})^{2x+1}=\frac{2}{\sqrt{2}}\left[(1+\sqrt{2})^{2y+1}-(1-\sqrt{2})^{2y+1}\right]$$

n'admet pas d'autre solution, en nombres entiers, que celle qui correspond aux valeurs $x=y=0$.

(DE JONQUIERES.)

Si l'on pose

$$t=\frac{(2+\sqrt{3})^{2x+1}+(2-\sqrt{3})^{2x+1}}{2},$$

$$w=\frac{(2+\sqrt{3})^{2x+1}-(2-\sqrt{3})^{2x+1}}{2\sqrt{3}},$$

$$u=\frac{(1+\sqrt{2})^{2y+1}+(1-\sqrt{2})^{2y+1}}{2},$$

$$v=\frac{(1+\sqrt{2})^{2y+1}-(1-\sqrt{2})^{2y+1}}{2\sqrt{2}},$$

on a identiquement

$$(1)\qquad t^2 - 3w^2 = 1,$$

$$(2)\qquad u^2 - 2v^2 = -1,$$

et l'équation proposée devient

$$(3)\qquad t = 2v.$$

De ce système de trois équations on déduit facilement le suivant :

$$(4)\qquad u^2 + 1 = 2v^2,$$

$$(5)\qquad 2u^2 + 1 = 3w^2.$$

Or, M. Gerono a démontré (2e série, t. XVII, p. 382) que ces deux dernières équations simultanées ne peuvent être vérifiées que par $u = v = w = 1$; d'où $t = 2$.

Donc il en résulte

$$(2+\sqrt{3})^{2x+1} + (2-\sqrt{3})^{2x+1} = 4,$$

$$(2+\sqrt{3})^{2x+1} - (2-\sqrt{3})^{2x+1} = 2\sqrt{3},$$

d'où

$$(2+\sqrt{3})^{2x+1} = 2+\sqrt{3},$$

équation qui évidemment ne peut être satisfaite, en nombres entiers, que par $x = 0$.

De même

$$(1+\sqrt{2})^{2y+1} + (1-\sqrt{2})^{2y+1} = 2,$$

$$(1+\sqrt{2})^{2y+1} - (1-\sqrt{2})^{2y+1} = 2\sqrt{2},$$

d'où

$$(1+\sqrt{2})^{2y+1} = 1+\sqrt{2},$$

et enfin $y = 0$.

Question 1420

(voir 3e série, t. I, p. 432).

PAR M. REBUFFEL,
Professeur au lycée d'Angers.

Trouver la valeur des intégrales

$$\int \frac{x^{n-1}\,dx}{\sqrt{R}}, \quad \int \frac{dx}{x[nx-(n+1)]\sqrt{R}},$$

dans lesquelles R *désigne le polynôme*

$$nx^{n-1}+(n-1)x^{n-2}+(n-2)x^{n-3}+\ldots+2x+1.$$

(S. RÉALIS.)

I. On sait que

$$R=\frac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(x-1)^2},$$

par conséquent

$$\int \frac{x^{n-1}\,dx}{\sqrt{R}}=\int \frac{x^{n-1}(x-1)\,dx}{\sqrt{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}}.$$

Posons

$$nx^{n+1}-(n+1)x^n+1=y,$$

d'où

$$n(n+1)(x^n-x^{n-1})\,dx=dy,$$

l'intégrale devient

$$\frac{1}{n(n+1)}\int\frac{dy}{\sqrt{y}}=\frac{2\sqrt{y}}{n(n+1)}=\frac{2(x-1)}{n(n+1)}\sqrt{R}.$$

II. On peut écrire la deuxième intégrale

$$\int \frac{x^{n-1}\,dx}{x^n[nx-(n+1)]\sqrt{R}}$$
$$=\int \frac{(x-1)x^{n-1}\,dx}{x^n[nx-(n+1)]\sqrt{x^n[nx-(n+1)]+1}},$$

et, en posant

$$x^n[nx-(n+1)]=y,$$

d'où

$$n(n+1)[x^n-x^{n-1}]\,dx=dy,$$

elle devient

$$\frac{1}{n(n+1)}\int\frac{dy}{y\sqrt{1+y}}=\frac{2}{n(n-1)}\,\mathrm{L}\,\frac{\sqrt{1+y}-1}{\sqrt{y}}$$

$$=\frac{2}{n(n+1)}\,\mathrm{L}\,\frac{(x-1)\sqrt{\mathrm{R}}-1}{\sqrt{(x-1)^2.\mathrm{R}-1}}.$$

Note. — La même question a été résolue par MM. Piuma (Charles-Marie), à Gênes; Chabanel (Charles) et H.-B.-D., professeur de Mathématiques à Rome.

Question 1423

(voir 3ᵉ série, t. I, p. 479);

PAR M. N. GOFFART.

On donne une conique fixe et deux points A *et* A′ *situés sur une même tangente à cette courbe.*

Par le point A′ *on mène une seconde tangente qui touche la conique en* d. *On mène la droite* Ad *qui rencontre de nouveau la conique au point* e, *la droite* A′e *qui coupe la conique au point* f *et enfin la droite* Af *rencontrant de nouveau la conique au point* g.

Démontrer que la tangente à la conique au point g *et la droite* A′ef *se coupent en un point de la seconde tangente menée du point* A *à la courbe.* (GENTY.)

Soient h [1] le point de contact de AA′ et i le point d'intersection de A′e et gd : la droite hi est la polaire de A [2]; elle rencontre la conique en m et la tangente A′d

---

[1] Le lecteur est prié de faire la figure.

[2] Parce que la polaire de A passe par le point d'intersection, i, des diagonales ef, dg du quadrilatère inscrit $dfge$ dont les côtés op-

en B. Or, d étant le pôle de $A'dB$, il en résulte que Ad est la polaire de B, et que par suite Be est tangente en e à la conique.

Appliquons le théorème de Pascal au triangle den.

Les tangentes Be, AA', $A'B$ rencontrent respectivement les côtés hd, de, eh aux points P, A, C qui sont en ligne droite.

Or e est le pôle de BeP, A' celui de hd : donc $A'fe$ est la polaire du point P. Cette polaire rencontre gd en i ainsi que hm : donc gm passe au point P.

Donc les trois pôles P, g, m étant en ligne droite, leurs polaires $A'ef$, gR tangente en g, et Am tangente en m se coupent au même point. C. Q. F. D.

Note. — Autres solutions analytiques de MM. Moret-Blanc, Ch. Robinet et U. Génin, élèves au Lycée de Bar-le-Duc; Romant, élève au Lycée de Lyon; Berthelet, élève au Lycée de Moulins.

Question 1424

(voir 3e série, t. I. p. 480),

PAR M. MORET-BLANC.

On donne un ellipsoïde et un point A, *on mène par ce point une sécante variable* D; *soit* D_1 *la droite conjuguée de* D *par rapport à l'ellipsoïde. Trouver le lieu de la projection* M *du point* A *sur la droite* D_1.

(BARBARIN.)

---

posés de, fg se coupent en A. La droite Hi prolongée rencontre la conique au point m de contact de la seconde tangente mA menée de A.

De même, la polaire du point P de rencontre des droites mg, dh passe par le point i intersection des diagonales gd, hm du quadrilatère inscrit $mghd$; donc $A'ef$ est la polaire du point P; et par conséquent les tangentes à la courbe aux points m, g se coupent en un point de $A'ef$. C'est ce qu'il fallait démontrer. (G.)

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0,$$

équation de l'ellipsoïde.

Soient x_0, y_0, z_0 les coordonnées du point A; x_1, y_1, z_1 celles d'un autre point B de la droite D.

La droite D_1 sera l'intersection des plans polaires des points A et B; elle aura pour équations

$$(1)\qquad \frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}+\frac{zz_0}{c^2}-1=0,$$

$$(2)\qquad \frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}+\frac{zz_1}{c^2}-1=0.$$

Les cosinus directeurs de cette droite sont proportionnels à

$$\frac{y_0z_1-z_0y_1}{b^2c^2},\quad \frac{z_0x_1-x_0z_1}{c^2a^2},\quad \frac{x_0y_1-y_0x_1}{a^2b^2};$$

l'équation du plan mené par le point A perpendiculairement à D_1 est donc

$$(3)\qquad \begin{cases} \dfrac{y_0z_1-z_0y_1}{b^2c^2}(x-x_0) \\ \quad +\dfrac{z_0x_1-x_0z_1}{c^2a^2}(y-y_0)+\dfrac{x_0y_1-y_0x_1}{a^2b^2}(z-z_0)=0. \end{cases}$$

On obtiendrait l'équation du lieu du point M en éliminant x_1, y_1, z_1 entre ces trois équations; mais l'équation (1), ne renfermant pas ces variables, est celle du lieu demandé qui est le plan polaire du point A.

Ce résultat pouvait être prévu, car la droite D tournant autour du point A, sa conjuguée D_1 se meut dans le plan polaire de ce point et peut y prendre toutes les positions; un point quelconque M du plan est donc la projection du point A sur une des droites D_1.

Note. — La même question a été résolue par M. Goffart.

Question 1427
(voir 3ᵉ série, t. I, p. 527)

PAR M. CHARLES CHABANEL.

Trouver la valeur de l'intégrale

$$\int \frac{(x-1)^m x^n\, dx}{\sqrt{P_n x^n + P_{n-1} x^{n-1} + \ldots + P_2 x^2 + P_1 x + 1}},$$

où l'on a posé, pour abréger,

$$P_k = \frac{(k+1)(k+2)(k+3)\ldots(k+2m+1)}{1.2.3\ldots(2m+1)}.$$

(S. RÉALIS.)

Désignons par R le polynôme compris sous le signe du radical. Le produit de R par $1.2.3\ldots(2m+1)$ est identique à la dérivée de l'ordre $2m+1$ de

$$x^{n+2m+1} + x^{n+2m} + x^{n+2m-1} + \ldots + x + 1 = \frac{x^{n+2m+2}-1}{x-1};$$

en posant

$$\varphi = \frac{x^{n+2m+2}-1}{x-1},$$

l'intégrale proposée devient donc

$$S = \sqrt{1.2.3\ldots(2m+1)} \int \frac{(x-1)^m x^n\, dx}{\sqrt{\dfrac{d^{2m+1}\varphi}{dx^{2m+1}}}}.$$

Soit

$$y^2 = (x-1)^{2m+2} \frac{d^{2m+1}\varphi}{dx^{2m+1}},$$

nous aurons, en différentiant cette équation,

$$2y\, dy = (x-1)^{2m+1} \left[(x-1) \frac{d^{2m+2}\varphi}{dx^{2m+2}} + (2m+2) \frac{d^{2m+1}\varphi}{dx^{2m+1}} \right] dx,$$

puis, en divisant le premier membre par y et le second par $(x-1)^{m+1}\sqrt{\dfrac{d^{2m+1}\varphi}{dx^{2m+1}}}$,

$$2\,dy = \frac{(x-1)^m}{\sqrt{\dfrac{d^{2m+1}\varphi}{dx^{2m+1}}}}\left[(x-1)\frac{d^{2m+2}\varphi}{dx^{2m+2}} + (2m+2)\frac{d^{2m+1}\varphi}{dx^{2m+1}}\right]dx.$$

De

$$(x-1)\varphi = x^{n+2m+2} - 1$$

on déduit successivement

$$(x-1)\frac{d\varphi}{dx} + \varphi = (n+2m+2)x^{n+2m+1},$$

$$(x-1)\frac{d^2\varphi}{dx^2} + 2\frac{d\varphi}{dx} = (n+2m+1)(n+2m+2)x^{n+2m},$$

$$(x-1)\frac{d^3\varphi}{dx^3} + 3\frac{d^2\varphi}{dx^2} = (n+2m)(n+2m+1)(n+2m+2)x^{n+2m-1},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$(x-1)\frac{d^{2m+2}\varphi}{dx^{2m+2}} + (2m+2)\frac{d^{2m+1}\varphi}{dx^{2m+1}} = (n+1)(n+2)\ldots(n+2m+2)x^n.$$

Donc

$$2\,dy = (n+1)(n+2)\ldots(n+2m+2)\frac{(x-1)^m x^n\,dx}{\sqrt{\dfrac{d^{2m+1}\varphi}{dx^{2m+1}}}}$$

et

$$S = \frac{2y\sqrt{1.2.3\ldots(2m+1)}}{(n+1)(n+2)\ldots(n+2m+2)}.$$

Remplaçant y par sa valeur

$$(x-1)^{m+1}\sqrt{\frac{d^{2m+1}\varphi}{dx^{2m+1}}} = (x-1)^{m+1}\sqrt{1.2.3\ldots(2m+1)\mathrm{R}},$$

on a

$$S = 2\times\frac{1.2.3\ldots(2m+1)}{(n+1)(n+2)\ldots(n+2m+2)}(x-1)^{m+1}\sqrt{\mathrm{R}}.$$

Remarque. — Si l'on fait $m = 0$ et si l'on remplace n par $n-1$, on a

$$R = nx^{n-1} + (n-1)x^{n-2} + (n-2)x^{n-3} + \ldots + 2x + 1$$

et

$$S = \int \frac{x^{n-1}}{\sqrt{R}} = \frac{2(x-1)\sqrt{R}}{n(n+1)}.$$

Note. — Solution analogue de M. Charles-Marie Piuma, à Gênes.

Question 1428

(voir 3e série, t. I, p. 528);

PAR M. ERNEST CÉSARO.

Si l'on considère les solutions entières (non négatives) de chacune des équations

$$x + 2y = n - 1, \quad 2x + 3y = n - 3, \quad 3x + 4y = n - 5, \quad \ldots,$$

le nombre total de ces solutions égale l'excès de $n+2$ sur le nombre des diviseurs de $(n+2)$.

(CATALAN.)

La $p^{\text{ième}}$ des équations proposées est

$$px + (p+1)y = n - (2p-1).$$

Il est visible qu'on y satisfait en prenant $x = -(n+3)$, $y = n+1$. En conséquence, les solutions *entières* de cette équation sont données par les formules

$$x = -(n+3) + (p+1)t,$$
$$y = n + 1 - pt,$$

où t est un entier quelconque.

Pour que x et y ne soient pas négatifs, il faut attribuer à t des valeurs telles qu'on ait

$$\frac{n+3}{p+1} \leqq t \leqq \frac{n+1}{p}$$

ou bien

$$\left[\frac{n+2}{p+1}\right] < t \leqq \left[\frac{n+1}{p}\right],$$

$[Z]$ désignant le plus grand nombre entier contenu dans Z.

Le nombre des solutions *entières, non négatives*, de l'équation considérée, est donc

$$N_p = \left[\frac{n+1}{p}\right] - \left[\frac{n+2}{p+1}\right].$$

Cela posé, il est clair que $\left[\frac{n+2}{p+1}\right] - \left[\frac{n+1}{p+1}\right]$ égale 1, ou 0, suivant que $p+1$ divise ou ne divise pas $n+2$.

Conséquemment on a

$$N_p = \left[\frac{n+1}{p}\right] - \left[\frac{n+1}{p-1}\right] - 1$$

si $p+1$ divise $n+2$, et

$$N_p = \left[\frac{n+1}{p}\right] - \left[\frac{n+1}{p-1}\right]$$

lorsque $p+1$ ne divise pas $n+2$.

Si $\theta(Z)$ désigne le nombre des diviseurs de Z, on obtient par addition

$$\begin{aligned} &N_1 + N_2 + N_3 + \ldots \\ &\quad = \left[\frac{n+1}{1}\right] - [\theta(n+2) - 1] = n + 2 - \theta(n+2) \text{ [1]}. \end{aligned}$$

Note. — La même question a été résolue par MM. Chabanel et Goffart.

---

(1) Si $px + (p+1)y = n - (2p-1)$ représente la dernière des équations

$$x + 2y = n - 1, \quad 2x + 3y = n - 3, \quad 3x + 4y = n - 5, \quad \ldots,$$