NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Solutions de questions proposées dans les Nouvelles annales

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 2 (1883), p. 471-479

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1883_3_2__471_1>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 1399

(voir 3e série, t. I, p. 192);

PAR M. MORET-BLANC.

En chaque point d'une conique on mène un diamètre et la normale. Trouver le lieu de l'intersection du diamètre et de la tangente à l'autre extrémité de la corde normale. (E. FAUQUEMBERGUE.)

1° Soient

$$(1) \qquad b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0$$

l'équation d'une ellipse, et x_1, y_1 les coordonnées d'un point pris sur la courbe. L'équation de la normale en ce point est

$$(2) \qquad b^2x_1y - a^2y_1x + c^2x_1y_1 = 0.$$

Éliminant y entre ces deux équations, on a, pour déterminer les abscisses des points d'intersection de la normale et de l'ellipse, l'équation

$$(b^6 x_1^2 + a^6 y_1^2)x^2 - 2a^4 c^2 x_1 y_1^2 x + a^2 c^4 x_1^2 y_1^2 - a^2 b^6 x_1^2 = 0,$$

qui admet la racine $x = x_1$. Divisant par $x - x_1$ et égalant le quotient à zéro, on a pour abscisse du second point d'intersection de la corde normale

$$x' = \frac{x_1[b^6 x_1^2 - a^4(2b^2 - a^2)y_1^2]}{b^6 x_1^2 + a^6 y_1^2},$$

d'où

$$y' = -\frac{y_1[a^6 y_1^2 + b^4(2a^2 - b^2)x_1^2]}{b^6 x_1^2 + a^6 y_1^2}.$$

L'équation de la tangente à l'ellipse en ce point est

$$b^2 x x' + a^2 y y' - a^2 b^2 = 0$$

ou

$$\begin{aligned} & b^2 x x_1 [b^6 x_1^2 + a^4(2b^3 - a^2)y_1^2] \\ & + a^2 y y_1 [a^6 y_1^2 + b^4(2a^2 - b^2)x_1^2] + a^2 b^2 (b^6 x_1^2 - a^6 y_1^2) = 0, \end{aligned}$$

qu'on peut écrire

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} & (b^2 x x_1 - a^2 y y_1)(b^6 x_1^2 - a^6 y_1^2) \\ & \quad + 2a^4 b^4 (x x_1 y_1^2 + y y_1 x_1^2) + a^2 b^2 (b^6 x_1^2 + a^6 y_1^2) = 0. \end{aligned} \right.$$

L'équation du diamètre passant par le point (x_1, y_1) est

$$(4) \qquad \frac{y}{y_1} = \frac{x}{x_1},$$

et l'on a la relation

$$(5) \qquad b^2 x_1^2 + a^2 y_1^2 = a^2 b^2.$$

On aura l'équation du lieu demandé en éliminant x_1 et y_1 entre ces trois équations.

Des deux dernières on tire

$$x_1 = \frac{abx}{\pm\sqrt{b^2 x^2 + a^2 y^2}}, \quad y_1 = \frac{aby}{\pm\sqrt{b^2 x^2 + a^2 y^2}}.$$

Reportant ces valeurs dans l'équation (3), on a, en divisant par $a^3 b^3$,

$$\begin{aligned}(b^2x^2 - a^2y^2)(b^6x^2 - a^6y^2) + 4a^4b^4x^2y^2\\ = ab(b^6x^2 + a^6y^2)\sqrt{b^2x^2 + a^2y^2},\end{aligned}$$

ou, en élevant au carré,

$$\begin{aligned}[b^8x^4 + a^8y^4 - a^2b^2(a^4 + b^4 - 4a^2b^2)x^2y^2]^2\\ = a^2b^2(b^6x^2 + a^6y^2)^2(b^2x^2 + a^2y^2).\end{aligned}$$

L'équation est du huitième degré; mais, comme elle ne contient que des termes du huitième et du sixième degré, on peut la résoudre en coordonnées polaires. On a

$$r^2 = \frac{a^2b^2(a^6\sin^2\theta + b^6\cos^2\theta)^2(a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta)}{[a^8\sin^4\theta + b^8\cos^4\theta - a^2b^2(a^4 + b^4 - 4a^2b^2)\sin^2\theta\cos^2\theta]^2}.$$

La courbe est symétrique par rapport aux axes et touche l'ellipse à ses quatre sommets.

Pour l'hyperbole, il suffirait de changer b^2 en $-b^2$.

2° Soient

$$y^2 = 2px$$

et

$$p(y - y_1) - y_1(x - x_1) = 0$$

l'équation d'une parabole et celle de sa normale au point x_1, y_1. Éliminant x entre ces deux équations, et supprimant de l'équation résultante la racine $y = y_1$, on a, pour l'ordonnée du second point d'intersection de la corde normale et de la parabole,

$$y' = -\frac{y_1^2 + p^2}{y_1},$$

d'où

$$x' = \frac{(y_1^2 - p^2)^2}{2py_1^2}.$$

La tangente au point (x', y'), a pour équation

$$\frac{-y(y_1^2 + p^2)}{y_1} = \frac{2py_1^2x - (y_1^2 + p^2)^2}{2y_1^2},$$

et le lieu de son intersection avec le diamètre $y = y_1$,

$$(y^2+p^2)^2+2y^2(y^2+p^2)+2py^2x=0$$

ou

$$(y^2+p^2)(3y^2+p^2)+2py^2x=0.$$

La courbe située tout entière du côté des x négatifs est symétrique par rapport à l'axe de la parabole qui est asymptote des deux branches : elle est limitée vers la droite à l'abscisse $x = -p(2+\sqrt{3})$.

Note. — La même question a été résolue par M. Lez et par un anonyme.

Question 1401

(voir 3e série, t. I, p. 240),

PAR M. CHARLES CHABANEL.

Soit q_p le quotient de la division de n par p, on a

$$q_1^2+q_2^2+q_3^2+\ldots+q_n^2 = q_1+3q_2+5q_3+\ldots+(2n-1)q_n.$$

(E. CÉSARO.)

Soit r le reste de la division de n par p, posons $q_p = \mathrm{P}$. De

$$(1) \qquad n = p\mathrm{P}+r \quad \text{ou} \quad \frac{n}{\mathrm{P}} = p+\frac{r}{\mathrm{P}},$$

on conclut que q_{P} est égal ou supérieur à p suivant que $r < \mathrm{P}$ ou $r \overset{=}{>} \mathrm{P}$.

L'égalité (1) revient à

$$n = (\mathrm{P}+1)p-(p-r),$$

et, parce que $r < p$, on a

$$n < (\mathrm{P}+1)p, \quad \frac{n}{\mathrm{P}+1} < p,$$

c'est-à-dire que le quotient $q_{\mathrm{P}+1}$ est inférieur à p.

On a évidemment

$$n = q_1 \geq q_2 \geq q_3 \geq \ldots \geq q_{P-1} \geq q_P \geq q_{P+1} \geq \ldots \geq q_n.$$

Il résulte de ce qui précède que dans la suite

$$q_1, \; q_2, \; q_3, \; \ldots, \; q_{P-1}, \; q_P, \; q_{P+1}, \; \ldots, \; q_n,$$

il y a P ou q_p quotients qui sont égaux ou supérieurs à p.

Par la même raison, il y aura q_{p+1} quotients égaux ou supérieurs à $p+1$. Donc le nombre des quotients égaux à p est $q_p - q_{p+1}$.

Ainsi, la somme

$$s = q_1^\alpha + q_2^\alpha + q_3^\alpha + \ldots + q_{n-1}^\alpha + q_n^\alpha,$$

contient

$q_1 - q_2$ termes égaux à 1^α,
$q_2 - q_3$ » 2^α,
$q_3 - q_4$ » 3^α,
....

et enfin

$q_n - q_{n+1}$ ou q_n termes égaux à n^α.

Donc on a, quel que soit l'exposant α,

$$\begin{aligned} s &= (q_1 - q_2)1^\alpha + (q_2 - q_3)2^\alpha \\ &\quad + (q_3 - q_4)3^\alpha + \ldots + (q_{n-1} - q_n)(n-1)^\alpha + q_n n^\alpha, \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} & q_1^\alpha + q_2^\alpha + q_3^\alpha + \ldots + q_n^\alpha \\ &\quad = q_1 1^\alpha + q_2(2^\alpha - 1^\alpha) + q_3(3^\alpha - 2^\alpha) + \ldots + q_n[n^\alpha - (n-1)^\alpha]. \end{aligned}$$

En faisant $\alpha = 2$, on a

$$\begin{aligned} & q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + \ldots + q_n^2 \\ &\quad = q_1 + 3q_2 + 5q_3 + \ldots + (2n-1)q_n, \end{aligned}$$

ce qui est la relation proposée.

Question 1453

(voir 3ᵉ série, t. II, p. 336);

PAR M. E. FAUQUEMBERGUE,
Professeur au lycée de Nice.

Le nombre $\dfrac{(\sqrt{2}+1)^{2n-1}+(\sqrt{2}-1)^{2n-1}}{2\sqrt{2}}$ *est la somme des carrés de deux nombres entiers.* (CATALAN.)

Posons

$$(\sqrt{2}+1)^{2n-1}=x\sqrt{2}+y,\quad (\sqrt{2}-1)^{2n-1}=x\sqrt{2}-y;$$

x n'est autre chose que le nombre proposé (¹).

En multipliant ces deux égalités membre à membre, on obtient l'équation

$$2x^2-y^2=1$$

ou encore

$$x^2=\left(\frac{y-1}{2}\right)^2+\left(\frac{y-1}{2}+1\right)^2,$$

équation de la forme

$$X^2=Y^2+Z^2,$$

dont les solutions en nombres entiers sont données par les formules

$$X=a^2+b^2,\quad Y=a^2-b^2,\quad Z=2ab,$$

où a et b représentent des nombres entiers.

Le nombre proposé est donc bien la somme de deux carrés.

Note. — La même question a été résolue par M. Moret-Blanc.

(¹) Et y est un nombre entier impair.

Question 1463

(voir 3e série, t. II, p. 383);

PAR M. JOSEPH CHAMBON [1].

Étant donné un point P *sur une ellipse de centre* O, *on mène en ce point une tangente et la normale qui touche au point* Q *la développée de l'ellipse, et l'on fait passer un cercle par les extrémités* R, R' *du diamètre conjugué à* OP, *et par la projection* S *du centre* O *sur la tangente en* P, *puis l'on prolonge* OS *jusqu'à sa rencontre en* S' *avec le cercle; démontrer que* OS' = PQ.

La droite PQ est, comme on sait, le rayon de courbure de l'ellipse au point P. Et, en nommant a, b les demi-axes de l'ellipse et b' le demi-diamètre conjugué à OP, on a

$$PQ = \frac{b'^3}{ab}$$

(*voir*, dans le *Traité des Sections coniques* de G. SALMON, les expressions des rayons de courbure).

D'autre part, OS étant la perpendiculaire menée du centre de l'ellipse à la tangente PS, on a

$$OS = \frac{ab}{b'}.$$

Donc le produit

$$PQ \times OS = \frac{b'^3}{ab} \times \frac{ab}{b'} = b'^2.$$

Mais, les cordes SS', RR' du cercle RSR' se coupant au point O, on a

$$OS' \times OS = OR' \times OR = OR^2 = b'^2.$$

([1]) Lorsque M. Chambon nous a adressé l'énoncé et la solution de la question 1463, il était élève au Lycée de Bordeaux.

Les égalités $PQ \times OS = b'^2$ et $OS' \times OS = b'^2$ donnent $OS' = PQ$. C. Q. F. D.

Note. — La même question a été résolue par MM. Moret-Blanc et J. Rénoy.

Question 1466

(voir 3e série, t. II, p. 384),

PAR M. MAURICE RACLOT,

Élève de l'École préparatoire Sainte-Barbe.

ABCD *étant un trapèze, on joint les extrémités* A *et* D *du côté oblique* AD *à un point* M *du côté* BC; *on mène une parallèle à* DM *par le point* B *et une parallèle à* AM *par le point* C. *Démontrer que ces deux droites se coupent sur* AD.

(D'OCAGNE.)

Soient O et O' les points de rencontre du côté AD, et des parallèles aux droites DM, AM, menées des points B et C.

Je prolonge les côtés AD, BC du trapèze jusqu'à leur rencontre en K.

On a, en vertu des parallèles AM, O'C, l'égalité de rapports

$$\frac{KO'}{KA} = \frac{KC}{KM},$$

d'où

$$KO' = \frac{KA.KC}{KM}.$$

De même, le parallélisme des droites DM, OB donne

$$\frac{KO}{KD} = \frac{KB}{KM},$$

d'où

$$KO = \frac{KD.KB}{KM}.$$

Mais, les bases AB, DC du trapèze ABCD étant parallèles, on a

$$\frac{KA}{KD} = \frac{KB}{KC},$$

d'où

$$KA.KC = KD.KB, \quad \text{et par suite} \quad KO = KO';$$

c'est-à-dire que les deux points O et O' coïncident.

Donc, les droites menées des points B et C, parallèlement à DM et AM, se coupent sur AD. C. Q. F. D.

Note. — La même question a été résolue par MM. Romero et Moret-Blanc.