Nouvelles annales de mathématiques

Alfred Chambeau

Concours d'admission à l'École centrale en 1881, seconde session

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 2 (1883), p. 500-504

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1883_3_2__500_1>

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE CENTRALE EN 1881,

SECONDE SESSION

(voir 3e série, t. I, p. 365);

SOLUTION DE M. ALFRED CHAMBEAU,
Élève du Lycée Condorcet.

On donne une parabole $y^2 = 2px$, *rapportée à son axe et à son sommet, et un point* $P(\alpha, \beta)$ *dans le plan de la courbe :*

1° *Démontrer que du point* P *on peut, en général, mener trois normales à la parabole ; former l'équation du troisième degré qui donne les ordonnées des pieds* A, B, C *de ces normales ;*

2° *Démontrer que chacune des deux courbes*

$$xy + (p - \alpha)y - p\beta = 0,$$
$$y^2 + 2x^2 - \beta y - 2\alpha x = 0,$$

passe par les quatre points A, B, C, P *et trouver l'équation générale de toutes les coniques passant par ces quatre points ;*

3° *Chacune de ces coniques coupe la parabole donnée aux trois points fixes* A, B, C *et en un quatrième point* D ; *trouver les coordonnées du point* D ;

4° *Par le sommet de la parabole donnée, on imagine deux droites parallèles aux asymptotes de l'une quelconque des coniques précédentes ; on mène la droite joignant les points d'intersection de ces deux droites avec la conique, et on la prolonge jusqu'à sa rencontre* *avec la parallèle* DD′ *menée à l'axe de la parabole par le point* D;

Former et discuter le lieu de ce point de rencontre.

1° L'équation de la parabole est

$$y^2 = 2px; \tag{1}$$

celle de la normale

$$Y - y = -\frac{y}{p}(X - x).$$

La normale devant passer par le point P(α, β), on a la condition

$$\beta - y = -\frac{y}{p}(\alpha - x).$$

Les points d'incidence sont à l'intersection de la parabole avec l'hyperbole équilatère ayant pour équation

$$xy + (p - \alpha)y - p\beta = 0; \tag{2}$$

il y a ordinairement trois points d'intersection, et par suite trois normales. Si l'hyperbole est tangente à la parabole, il n'y a plus que deux solutions; enfin, d'après la position même des deux coniques, il y a toujours un point réel d'intersection.

Cherchons l'équation aux ordonnées des points d'incidence; éliminant x entre les équations (1) et (2), on obtient

$$y^3 + 2p(p - \alpha)y - 2p^2\beta = 0, \tag{3}$$

équation du troisième degré qui montre qu'il y aura ordinairement trois solutions; elle a d'ailleurs toujours une racine réelle.

La condition pour que cette équation ait une racine double est, après simplification,

$$27p\beta^2 - 8(\alpha - p)^3 = 0.$$

C'est le lieu des points P par lesquels on peut mener deux normales à la parabole, c'est la *développée de la parabole;* cette courbe divise le plan en deux régions : dans l'une on a

$$27p\beta^2 - 8(\alpha - p)^3 > 0$$

et l'on ne peut mener par un point qu'une normale à la parabole; dans l'autre on a

$$27p\beta^2 - 8(\alpha - p)^3 < 0$$

et l'on peut mener d'un point trois normales à cette courbe.

2° L'équation

$$(4) \qquad y^2 + 2x^2 - \beta y - 2\alpha x = 0$$

représente une ellipse, et elle résulte de l'élimination de p entre les équations (1) et (2), car de l'équation (1) on tire

$$p = \frac{y^2}{2x};$$

remplaçant p par $\frac{y^2}{2x}$ dans l'équation (2), on a

$$y(y^2 + 2x^2 - \beta y - 2\alpha x) = 0,$$

équation qui donne $y = 0$, axe des x, et

$$y^2 + 2x^2 - \beta y - 2\alpha x = 0,$$

résultant de la combinaison des équations (1) et (2). Cette équation représente une conique passant par les points d'intersection de la parabole et de l'hyperbole équilatère, c'est-à-dire par les pieds des normales menées du point P; on vérifie de même facilement que le point P est sur cette ellipse.

Il suit de là que l'équation générale des coniques passant par les quatre points A, B, C, P est

$$(5) \qquad xy + (p - \alpha)y - p\beta + \lambda(y^2 + 2x^2 - \beta y - 2\alpha x) = 0.$$

3° Nous savons que les coniques représentées par l'équation (5) coupent la parabole aux points A, B, C. Cherchons les coordonnées du quatrième point d'intersection D : l'équation aux ordonnées de ce point s'obtient en éliminant x entre les équations (1) et (5), ce qui donne

$$p[y^3+2p(p-\alpha)y-2p^2\beta] \\ +\lambda y[y^3+2p(p-\alpha)y-2p^2\beta]=0$$

ou

$$[y^3+2p(p-\alpha)y-2p^2\beta](\lambda y+p)=0$$

et, par suite, les deux équations

$$y^3+2p(p-\alpha)y-2p^2\beta=0,$$

correspondant aux trois points A, B, C, et $\lambda y+p=0$ ou $y=-\frac{p}{\lambda}$, ordonnée du point D. Son abscisse, tirée de l'équation (1), est

$$x=\frac{p}{2\lambda^2}.$$

4° L'équation (5) ordonnée est

(6) $\lambda y^2+xy+2\lambda x^2+(p-\alpha-\beta\lambda)y-2\lambda\alpha x-p\beta=0;$

l'équation donnant les directions asymptotiques est

(7) $$\lambda y^2+xy+2\lambda x^2=0.$$

En retranchant ces deux équations membre à membre, on a

(8) $$(p-\alpha-\beta\lambda)y-2\lambda\alpha x-p\beta=0.$$

C'est l'équation de la droite passant par les points d'intersection de la conique et des directions asymptotiques. La parallèle à l'axe de la parabole passant par le point D a pour équation

(9) $$y=-\frac{p}{\lambda}.$$

Éliminons λ entre les équations (8) et (9), nous aurons l'équation du lieu demandé

$$y^2 = \frac{2p\alpha}{\alpha - p}x,$$

équation d'une parabole ayant même axe et même sommet que la parabole donnée.

Note. — La même question a été résolue par MM. Moret-Blanc et Sequestre, Maître-Répétiteur au Lycée d'Angoulême.