NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

L. SALTEL

Nouveaux développements sur une méthode d'élimination

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 2 (1883), p. 554-566

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1883_3_2__554_1>

NOUVEAUX DÉVELOPPEMENTS SUR UNE MÉTHODE D'ÉLIMINATION [1];

PAR M. L. SALTEL.

Cette méthode, et c'est là son caractère principal, per-

[1] Voir t. XX, 2e série des *Nouvelles Annales*.

met d'éliminer *successivement* [1], par la simple résolution de l'équation

$$ax^n + b = 0, \tag{1}$$

$k - 1$ inconnues entre k équations. Elle repose, rappelons-le, sur deux points principaux : le premier est relatif aux *solutions étrangères* qui s'introduisent *nécessairement* par la substitution, dans une ou plusieurs des autres équations, de la valeur

$$x^n = -\frac{b}{a}, \tag{2}$$

déduite de (1) ; le second indique le moyen de supprimer, dans la suite des calculs, ces non-solutions.

Nous regrettons de ne pas avoir mentionné, dans notre première Communication, les remarques et applications suivantes, qui jettent un jour nouveau sur ce procédé, qui est incontestablement le plus simple en théorie [2] et le plus rapide en pratique aussitôt que le nombre des équations devient supérieur à deux [3].

I. — Remarques.

Remarque I. — Soient deux équations

$$A(x, y, z, t) = 0, \tag{1}$$
$$B(x, y, z, t) = 0, \tag{2}$$

---

(1) On peut lire, dans le *Traité d'Algèbre supérieure* de M. Serret, que le procédé par *éliminations successives* était jusqu'ici seulement applicable aux équations du premier degré.

(2) On pourrait bien objecter que parfois la détermination du degré de multiplicité des solutions étrangères est délicate, mais, somme toute, ce nombre n'est pas indispensable; il suffit de supprimer ces non-solutions préalablement connues le plus grand nombre de fois possible.

(3) Il est même souvent le plus rapide dans le cas de deux équations incomplètes, c'est-à-dire dans le cas où ces équations ne sont pas les plus générales de leur espèce.

supposées algébriques et entières par rapport à x, y, z, t. Si toutes les solutions de (1) conviennent à (2), cette équation (2) pourra s'écrire sous la forme

$$B(x, y, z, t).C(x, y, z, t) = 0, \tag{3}$$

l'expression

$$C(x, y, z, t) \tag{4}$$

représentant un polynôme algébrique entier en x, y, z, t.

Pour s'en rendre compte, il suffit d'observer que, toutes les solutions de (1) vérifiant (2), il en résulte, en considérant y, z, t comme des coefficients ayant des valeurs arbitraires, que toutes les solutions de l'équation (1) à une seule inconnue x vérifient l'équation (2) également à une seule inconnue; donc, d'après un théorème élémentaire, l'équation (2) peut bien s'écrire sous la forme (3).

Remarque II. — Nous avons déjà fait observer que si, dans les deux équations

$$(S)\left\{\begin{array}{ll} A_1(x,y)\alpha^m + A_2(x,y)\alpha^{m-1} + \ldots + A_{m+1}(x,y) = 0, & (1)\\ B_1(x,y)\alpha^n + B_2(x,y)\alpha^{n-1} + \ldots + B_{n+1}(x,y) = 0, & (2)\end{array}\right.$$

on a identiquement

$$A_1(x,y) = B_1(x,y), \tag{3}$$

la substitution de

$$\alpha^n = -\frac{B_2\alpha^{n-1} + \ldots + B_{n+1}}{B_1} \tag{4}$$

n'introduit pas de solution étrangère, pourvu que l'on ait soin, avant de chasser les dénominateurs, de laisser le numérateur et le dénominateur du premier terme par $B_1(x,y)$; on peut ajouter quelque chose de plus : en procédant de la sorte, on supprime la solution

$$A_1(x,y) = 0, \tag{5}$$

résultant de α infini; ajoutons encore que, si l'on a identiquement

$$A_{m+1}(x,y) = B_{n+1}(x,y), \tag{6}$$

le système (S) étant vérifié par

$$\begin{cases} \alpha = 0, & (7) \\ A_{m+1}(x,y) = 0, & (8) \end{cases}$$

on pourra supprimer la courbe représentée par (8), en posant

$$\alpha = \frac{1}{\alpha'}$$

et prenant α' pour nouveau paramètre variable.

Remarque III. — Soient

$$(\alpha) \qquad \begin{cases} A(x,y,z,t).v + B(x,y,z,t) = 0, & (1) \\ C(x,y,z,t,v) = 0 & (2) \end{cases}$$

deux équations contenant cinq inconnues x, y, z, t, v (¹). Le système

$$(\beta) \qquad \begin{cases} A(x,y,z,t).v + B(x,y,z,t) = 0, & (3) \\ D(x,y,z,t) = 0, & (4) \end{cases}$$

obtenu en substituant, dans (2), à la place de v, la valeur

$$v = -\frac{B(x,y,z,t)}{A(x,y,z,t)} \tag{5}$$

déduite de (1), n'est pas *entièrement* équivalente à (α), attendu que ce dernier système est vérifié, quelle que soit la valeur attribuée à v par toutes les solutions en x, y, z, t communes à

$$(\gamma) \qquad \begin{cases} A(x,y,z,t) = 0, & (6) \\ B(x,y,z,t) = 0, & (7) \end{cases}$$

(¹) C'est uniquement pour mieux préciser que nous prenons *cinq* inconnues; il est bien entendu que la remarque en question est indépendante de ce nombre.

tandis que le système (α) donne, par l'équation (2), pour chacune de ces solutions particulières, un nombre déterminé de valeurs de v, nombre égal à la plus haute puissance de cette inconnue dans cette équation (2).

Ainsi : (β) *est équivalent à* (α) *pour toutes les solutions relatives aux quatre inconnues* x, y, z, t, *mais il n'est équivalent à* (α), *relativement aux cinq inconnues* x, y, z, t, v, *que pour les solutions ne résultant pas des racines communes à* (6), (7).

Généralisation. — D'une manière plus générale, si l'on a le système de deux équations

$$(\delta)\quad \begin{cases} U_1(x,y,z,t,v) = 0, & (8) \\ U_2(x,y,z,t,v) = 0, & (9) \end{cases}$$

et qu'on lui substitue le système

$$(\varepsilon)\quad \begin{cases} V_1(x,y,z,t).v + V_2(x.y,z,t) = 0, & (10) \\ W(x,y,z,t) = 0, & (11) \end{cases}$$

obtenu en éliminant entre ces deux équations, par un procédé quelconque ([1]), l'inconnue v, ce système est bien équivalent à (8) pour toutes les valeurs relatives aux *quatre* inconnues x, y, z, t; mais, comme l'équation (11) est *nécessairement* ([2]) vérifiée par les solutions communes à

$$(\varphi)\quad \begin{cases} V_1(x,y,z.t) = 0, & (12) \\ V_2(x,y,z,t) = 0, & (13) \end{cases}$$

il n'est équivalent à (8), relativement aux *cinq* inconnues x, y, z, t, v, que pour les solutions ne vérifiant pas

---

([1]) Il est bien entendu, redisons-le une fois pour toutes, que, si l'on a suivi, pour faire cette élimination, notre méthode, appliquée au cas de deux équations, nous supposons les fonctions V_1, V_2, W débarrassées des facteurs etrangers.

([2]) C'est notre méthode qui nous a conduit à l'observation de cet important resultat.

(12), (13). On verra plus loin l'importance de cette remarque.

II. — Première application.

Problème. — *Trouver les solutions en x, y, z communes à un système de la forme*

$$(A)\quad \begin{cases} V_1(x,y).z + V_2(x,y) = 0, & (1) \\ U_1(x,y,z) = 0, & (2) \\ U_2(x,y,z) = 0, & (3) \end{cases}$$

les fonctions V_1, V_2, U_1, U_2 *étant algébriques et entières.*

Solution. — Pour plus de clarté, nous supposerons les fonctions U_1, U_2 d'ordres m_1, m_2 par rapport à z.

Cela dit, observons d'abord qu'il n'est pas exact de dire que le système

$$(B)\quad \begin{cases} V_1(x,y).z + V_2(x,y) = 0, & (4) \\ W_1(x,y) = 0, & (5) \\ W_2(x,y) = 0, & (6) \end{cases}$$

obtenu en substituant, dans (2), (3), à la place de z, la valeur

$$z = -\frac{V_2(x,y)}{V_1(x,y)} \qquad (7)$$

déduite de (1), soit équivalent au système (A); ce dernier système est, en effet, vérifié par les solutions en x, y communes à

$$(C)\quad \begin{cases} V_1(x,y) = 0, & (8) \\ V_2(x,y) = 0, & (9) \end{cases}$$

tandis que le système (A) n'admet généralement pas ces solutions. Le système (B) se compose donc du système (A), plus du système (C) *compté un certain nombre de fois*. Comment déterminer ce dernier degré de multiplicité? C'est là une question qui nous a semblé assez longtemps fort difficile. Il suffit cependant d'observer que les courbes représentées par (5), (6) admettent respectivement les points communs aux courbes représentées par (8), (9) pour points multiples d'ordres m_1, m_2 [1]; par conséquent, les solutions étrangères représentées par (C) doivent être chacune comptées $m_1 m_2$ fois [2]; donc, si les équations

$$\text{(D)} \quad \begin{cases} M_1(x).y + M_2(x) = 0, & (10) \\ M_3(x) = 0, & (11) \end{cases}$$

$$\text{(E)} \quad \begin{cases} N_1(x).y + N_2(x) = 0, & (12) \\ N_3(x) = 0 & (13) \end{cases}$$

sont celles que l'on obtient en éliminant y entre (5), (6) et (8), (9), le polynôme $M_3(x)$ devra être divisible par le polynôme $N_3(x)$ élevé à la puissance $n_1 n_2$. En représentant par $P(x)$ le quotient, le système proposé (A) sera *équivalent* à

$$\text{(A')} \quad \begin{cases} V_1(x,y).z + V_2(x,y) = 0, & (14) \\ M_1(x).y + M_2(x) = 0, & (15) \\ P(x) = 0. & (16) \end{cases}$$

III. — Deuxième application.

Problème. — *Trouver les solutions en x, y, z communes aux trois équations*

$$\text{(A)} \quad \begin{cases} U_1(x,y,z) = 0, & (1) \\ V_2(x,y,z) = 0, & (2) \\ V_3(x,y,z) = 0, & (3) \end{cases}$$

supposées algébriques et entières.

---

[1] Ces équations (5), (6) peuvent, en effet, être considérées comme représentant les équations des courbes définies par (1), (2) et (1), (3), où l'on considère z comme un paramètre variable.

[2] En supposant que les points multiples en question n'aient pas de tangentes communes, ce qui a lieu si les équations (1), (2), (3) sont indépendantes entre elles, on voit qu'à chacune des solutions communes à (8), (9) correspondent respectivement, d'après (5), (6), $m_1 m_2$ valeurs de z.

Solution. — Éliminons, par notre méthode ou par l'une quelconque des méthodes connues, z entre les équations (1), (2), et soit

$$(\mathrm{B}) \qquad \left\{ \begin{array}{ll} V_1(x,y).z + V_2(x,y) = 0, & (4) \\ W_1(x,y) = 0 & (5) \end{array} \right.$$

le résultat obtenu.

Substituons au système (A) le système

$$(\mathrm{C}) \qquad \left\{ \begin{array}{ll} V_1(x,y).z + V_2(x,y) = 0, & (6) \\ W_1(x,y) = 0, & (7) \\ V_3(x,y) = 0, & (8) \end{array} \right.$$

obtenu en remplaçant les équations (1), (2) par (4), (5).

Ayant déjà montré, dans notre première Communication, que les points communs aux courbes définies par

$$(\mathrm{D}) \qquad \left\{ \begin{array}{ll} V_1(x,y) = 0, & (9) \\ V_2(x,y) = 0 & (10) \end{array} \right.$$

représentent, en général, des points doubles ou simples de la courbe représentée par (7) ([1]), on voit que (C) se compose de (A) plus du système étranger

$$(\mathrm{E}) \qquad \left\{ \begin{array}{ll} V_1(x,y) = 0, & (11) \\ V_2(x,y) = 0, & (12) \\ V_3(x,y) = 0. & (13) \end{array} \right.$$

Cette observation faite, substituons dans (8), à la place de z, la valeur donnée par (6), on aura le système

$$(\mathrm{F}) \qquad \left\{ \begin{array}{ll} V_1(x,y).z + V_2(x,y) = 0, & (14) \\ W_1(x,y) = 0, & (15) \\ W_2(x,y) = 0, & (16) \end{array} \right.$$

qui se composera du système proposé (A), plus des solutions communes à (D) comptées avec un certain degré

([1]) Nous reviendrons sur ce point dans une Note spéciale.

de multiplicité. Il est bien entendu que l'on déterminera ce dernier degré de multiplicité en se rappelant que tous les points définis par (D) ont le même degré de multiplicité dans la courbe représentée par (16), et que les uns sont *doubles*, et les autres *peuvent* être *simples* dans la courbe définie par (15).

Nota. — Bien qu'ayant supposé que les surfaces représentées par (1), (2), (3) n'avaient pas de ligne commune, notre méthode, et c'est la seule douée de ce privilège, permet de trouver, comme nous allons le constater dans l'application suivante, tous les points communs situés en dehors de cette ligne commune.

IV. — Troisième application.

Problème. — *Trouver les solutions en x, y, z, t communes à un système de la forme*

$$
(\mathrm{A}) \quad \left\{
\begin{array}{ll}
V_1(x, y, z).t + V_2(x, y, z) = 0, & (1) \\
U_1(x, y, z, t) = 0, & (2) \\
U_2(x, y, z, t) = 0, & (3) \\
U_3(x, y, z, t) = 0, & (4)
\end{array}
\right.
$$

supposées algébriques et entières.

Le système

$$
(\mathrm{B}) \quad \left\{
\begin{array}{ll}
V_1(x, y, z).t + V_2(x, y, z) = 0, & (5) \\
W_1(x, y, z) = 0, & (6) \\
W_2(x, y, z) = 0, & (7) \\
W_3(x, y, z) = 0, & (8)
\end{array}
\right.
$$

obtenu en substituant, dans (2), (3), (4), à la place de t, la valeur

$$
t = -\frac{V_2(x, y, z)}{V_1(x, y, z)} \qquad (9)
$$

déduite de (1), n'est pas équivalent au système (A); ce dernier système est, en effet, vérifié par les solutions de

x, y, z communes à

$$(C) \quad \begin{cases} V_1(x, y, z) = 0, & (10) \\ V_2(x, y, z) = 0; & (11) \end{cases}$$

on peut même ajouter, si l'on considère x, y, z comme coordonnées courantes, et si l'on suppose que n_1, n_2, n_3 soient les plus hauts exposants de t dans (2), (3), (4), que la courbe gauche définie par (C) est respectivement multiple d'ordre n_1, n_2, n_3 pour les surfaces représentées par (6), (7), (8). L'élimination de deux des inconnues entre (6), (7), (8) doit donc conduire à l'identité $0 = 0$. Voici comment nous levons cette indétermination (¹).

Substituons seulement la valeur (9) dans les équations (2), (3), et considérons le système

$$(D) \quad \begin{cases} V_1(x, y, z).t + V_2(x, y, z) = 0, & (12) \\ W_1(x, y, z) = 0, & (13) \\ W_2(x, y, z) = 0, & (14) \end{cases}$$

qui se composera évidemment du système

$$(E) \quad \begin{cases} V_1(x, y, z).t - V_2(x, y, z) = 0, & (15) \\ U_1(x, y, z, t) = 0, & (16) \\ U_2(x, y, z, t) = 0, & (17) \end{cases}$$

plus du système défini par (C).

Substituons au système (D) le système

$$(D') \quad \begin{cases} V_1(x, y, z).t + V_2(x, y, z) = 0, & (18) \\ M_1(x, y).z - M_2(x, y) = 0, & (19) \\ M_3(x, y) = 0, & (20) \end{cases}$$

obtenu en éliminant, par un procédé quelconque, z entre (13), (14), et représentons par

$$(C') \quad \begin{cases} N_1(x, y).z - N_2(x, y) = 0, & (21) \\ N_3(x, y) = 0 & (22) \end{cases}$$

(¹) Nous avions déjà indiqué, dans le Mémoire : *Sur un paradoxe mathématique*, l'idée d'éliminer un ou plusieurs paramètres en vue de faire naître des facteurs.

le système résultant de l'élimination de z entre les équations (C).

Toutes les solutions de (22) vérifiant (C′) et étant partant comprises dans (D′), le premier membre de (20) est nécessairement divisible un certain nombre de fois par le premier membre de (22); représentons par $R(x,y)$ le quotient, le système

$$(E')\quad \left\{\begin{aligned} & V_1(x,y,z).t - V_2(x,y,z) = 0, && (23)\\ & M_1(x,y).z + M_2(x,y) = 0, && (24)\\ & R(x,y) = 0 && (25) \end{aligned}\right.$$

se composera du système (E) plus du système

$$(F)\quad \left\{\begin{aligned} & V_1(x,y,z) = 0, && (26)\\ & V_2(x,y,z) = 0, && (27)\\ & R(x,y) = 0, && (28) \end{aligned}\right.$$

attendu que (C) vérifiant (13), (14) vérifie aussi (24), qui n'est autre que (19); donc le système

$$(E'')\quad \left\{\begin{aligned} & V_1(x,y,z)\,t - V_2(x,y,z) = 0, && (29)\\ & M_1(x,y)\,z + M_2(x,y) = 0, && (30)\\ & R(x,y) = 0, && (31)\\ & U(x,y,z,t) = 0 && (32) \end{aligned}\right.$$

se composera du système proposé (A) plus du système étranger

$$(F')\quad \left\{\begin{aligned} & V_1(x,y,z) = 0, && (33)\\ & V_2(x,y,z) = 0, && (34)\\ & R(x,y) = 0, && (35)\\ & U_3(x,y,z,t) = 0. && (36) \end{aligned}\right.$$

Ces deux derniers systèmes admettant tous les deux un nombre fini de solutions communes en x, y, z, t et la résolution du système (F′) étant comprise dans les applications précédentes, on voit que toute la question est réduite à résoudre (E″).

Pour cela, substituons dans (32) à la place de t la valeur déduite de (29), on aura le système

$$(G)\quad \begin{cases} V_1(x,y,z).t + V_2(x,y,z) = 0, & (37) \\ M_1(x,y).z + M_2(x,y) = 0, & (38) \\ R(x,y) = 0, & (39) \\ W_3(x,y,z) = 0, & (40) \end{cases}$$

qui se composera de (E'') plus du système (F); ces deux derniers systèmes admettant encore un nombre fini de solutions communes en x, y, z, t, et, leur résolution étant comprise dans les applications précédentes, le problème proposé est définitivement résolu.

V. — Quatrième application.

Problème. — *Trouver les solutions en x, y, z, t communes aux équations*

$$(A)\quad \begin{cases} U_1(x,y,z,t) = 0, & (1) \\ U_2(x,y,z,t) = 0, & (2) \\ U_3(x,y,z,t) = 0, & (3) \\ U_4(x,y,z,t) = 0, & (4) \end{cases}$$

supposées algébriques et entières.

Solution. — Substituons à ce système le système

$$(B)\quad \begin{cases} V_1(x,y,z).t + V_2(x,y,z) = 0, & (5) \\ W(x,y,z) = 0, & (6) \\ U_3(x,y,z,t) = 0, & (7) \\ U_4(x,y,z,t) = 0, & (8) \end{cases}$$

obtenu en éliminant t entre les équations (1), (2). L'équation (6) a toutes les solutions communes à

$$(C)\quad \begin{cases} V_1(x,y,z) = 0, & (9) \\ V_2(x,y,z) = 0; & (10) \end{cases}$$

le système (B) se compose de (A), plus du système

$$(D)\quad \begin{cases} V_1(x,y,z) = 0, & (11) \\ V_2(x,y,z) = 0, & (12) \\ U_3(x,y,z,t) = 0, & (13) \\ U_4(x,y,z,t) = 0. & (14) \end{cases}$$

Ayant deja appris à résoudre les systèmes (B) et (D), le problème est résolu.