

LAGUERRE

**Sur les courbes de direction de la  
troisième classe**

*Nouvelles annales de mathématiques 3<sup>e</sup> série*, tome 2  
(1883), p. 97-109

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1883\\_3\\_2\\_97\\_0](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1883_3_2_97_0)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1883, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## SUR LES COURBES DE DIRECTION DE LA TROISIÈME CLASSE;

PAR M. LAGUERRE.

## I.

1. Étant donnée une semi-droite quelconque  $\Delta$ , si l'on considère l'ensemble des semi-droites qui lui sont parallèles, on peut les regarder comme concourant en un même point situé à l'infini et que je désignerai par  $\Delta_{\infty}$ . Les semi-droites parallèles à la semi-droite opposée  $-\Delta$  (1) peuvent être regardées comme concourant en un même point  $-\Delta_{\infty}$  situé à l'infini.

Ces deux points doivent être considérés comme distincts, et, si l'on appelle  $D$  la droite définie par les semi-droites  $\Delta$  et  $-\Delta$ , on voit que  $D$  renferme deux points situés à l'infini, à savoir  $\Delta_{\infty}$  et  $-\Delta_{\infty}$ .

Nous considérerons les points à l'infini comme situés sur une conique infiniment aplatie et ayant pour sommets les ombilics du plan, et, pour plus de clarté, j'appellerai le point  $\Delta_{\infty}$  un *semi-point*, en sorte que la *conique de l'infini* sera le lieu des semi-points du plan.

Un point de la *droite de l'infini* doit être considéré comme la réunion de deux semi-points opposés.

Si l'on imagine un cycle variable qui touche constamment deux semi-droites opposées  $\Delta$  et  $-\Delta$ , ce cycle, lorsque son centre est rejeté à l'infini, se réduit aux deux semi-points  $\Delta_{\infty}$  et  $-\Delta_{\infty}$ .

Un semi-point peut être considéré comme une courbe de direction de la classe un; il n'y a du reste pas d'autre courbe de direction qui soit de cette classe.

(1) En général,  $D$  désignant une semi-droite quelconque, j'appellerai  $-D$  la semi-droite opposée.

Les courbes de direction de la deuxième classe ne comprennent que les cycles; je me propose, dans cette Note, d'étudier les courbes de direction de la troisième classe.

2. Soit  $\mu$  le nombre des tangentes que l'on peut mener à une courbe de direction de la troisième classe et parallèlement à une semi-droite donnée; comme on peut lui mener également  $\mu$  tangentes parallèles à la semi-droite opposée, il résulte de là que, par un point de la droite de l'infini, on peut mener à la courbe  $2\mu$  tangentes distinctes de cette droite. En désignant par  $\rho$  le nombre des points de contact de la droite de l'infini et de la courbe, on a donc

$$2\mu + \rho = 3,$$

et, comme  $\rho$  ne peut être égal à 3, il en résulte  $\rho = 1$  et  $\mu = 1$ .

Ainsi la courbe considérée touche la droite de l'infini; une semi-droite isotrope coïncidant avec son opposée, on voit en outre que les deux tangentes (distinctes de la droite de l'infini) que l'on peut, d'un ombilic du plan, mener à la courbe, sont confondues; la courbe passe donc par les deux ombilics.

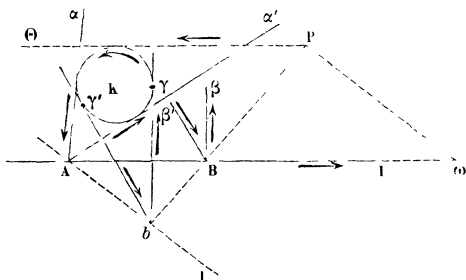
3. Il est clair qu'on ne peut mener à une courbe de direction de la troisième classe qu'une seule tangente  $T$  parallèle à une semi-droite donnée. Traçons dans le plan un cycle arbitraire  $K$  et menons à ce cycle une tangente  $\Theta$  parallèle à  $T$ ; je dirai que cette tangente est l'image de  $T$ . Si l'on imagine un nombre quelconque de tangentes à la courbe considérée et si l'on mène tangentielllement à  $K$  des tangentes parallèles, ces dernières (ou si l'on veut encore leurs points de contact) formeront l'image des tangentes à la courbe. On voit qu'une

tangente à la courbe est déterminée quand on se donne son image sur le cycle  $K$ .

4. Considérons une courbe de direction de la troisième classe  $H$  et une tangente quelconque  $T$  à cette courbe. Par chaque point de cette semi-droite, on peut mener à la courbe deux tangentes distinctes de  $T$ ; soient  $\alpha A$  et  $A\alpha'$  les tangentes issues d'un point quelconque  $A$  de  $T$ . Inscrivons dans ces deux semi-droites un cycle quelconque  $K$  sur lequel nous ferons l'image des tangentes à  $H$ .

Soit  $B$  un autre point quelconque de  $T$ ; désignons par  $B\beta$  et  $\beta'B$  les tangentes issues de ce point et soient  $\gamma b$  et  $\gamma'b$  leurs images sur le cycle fixe  $K$ . Il est clair que si l'on se donne la semi-droite  $b\gamma$ , la tangente  $B\beta$  est détermi-

Fig. 1.



née et, par suite, le point  $B$  ainsi que la deuxième tangente  $B\beta'$  et son image  $b\gamma'$ . Des deux tangentes au cycle  $K$ ,  $b\gamma$  et  $b\gamma'$ , l'une étant déterminée quand on se donne l'autre, il en résulte qu'elles forment un système en involution et que leur point de rencontre  $b$  décrit une droite du plan. Cette droite  $U$  passe du reste par le point  $A$ , puisque les tangentes  $A\alpha$  et  $A\alpha'$  se confondent avec leurs images.

A chaque point B de la droite T correspond un point  $b$  de la droite U; les points B et  $b$  déterminent donc sur ces droites des divisions homographiques et, comme le point A se correspond évidemment à lui-même, on en conclut que la droite B $b$  passe par un point fixe du plan.

Pour déterminer la position de ce point fixe, je remarquerai que, si le point B s'éloigne à l'infini sur la tangente T, l'une des tangentes que l'on peut de ce point mener à la courbe est la tangente opposée à T. Si donc nous menons au cycle K la tangente  $\Theta$  anti-parallèle à T, le point  $b$  est situé sur cette semi-droite et la droite  $bB$  se confond avec  $\Theta$  qui, par suite, contient le point fixe cherché.

Soit P ce point fixe; par ce point menons une droite parallèle à U et coupant T au point  $\omega$ . Le point  $\omega'$  où P $\omega$  rencontre U étant situé à l'infini, les tangentes menées de  $\omega'$  au cycle K sont opposées et ont pour directions celles déterminées par la droite P $\omega$ ; il résulte donc de ce qui précède que les tangentes issues de  $\omega$  sont les deux semi-droites opposées déterminées par la droite P $\omega$ , qui est ainsi *une tangente double apparente de la courbe*.

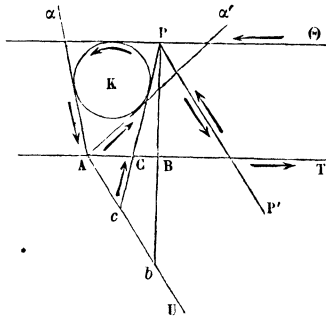
Ainsi la courbe de direction de la troisième classe la plus générale passe par les ombilics du plan, touche la droite de l'infini et a une tangente double apparente; c'est donc un hypercycle cubique, ou, en d'autres termes, une anticaustique par réflexion de la parabole, les rayons incidents étant parallèles.

§. La proposition que je viens de démontrer peut encore s'énoncer de la façon suivante :

Considérons une tangente quelconque T à un hypercycle cubique H; d'un point A, pris arbitrairement sur cette semi-droite, menons les deux tangentes à la courbe

$A\alpha$  et  $A\alpha'$  qui sont distinctes de  $T$ , puis inscrivons dans ces semi-droites un cycle quelconque  $K$ .

Fig. 2.



Menons à ce cycle la tangente  $\Theta$  anti-parallèle à  $T$  et soit  $P$  le point où cette tangente rencontre la tangente double  $PP'$  de la courbe; soit de plus  $AU$  la droite menée par  $A$  parallèlement à  $P$ .

Cela posé, si, par le point fixe  $P$ , on mène une sécante arbitraire coupant respectivement  $T$  et  $U$  aux points  $B$  et  $b$ , les tangentes que l'on peut mener à l'hypercycle par le point  $B$  sont parallèles aux tangentes menées du point  $b$  au cycle  $K$ .

6. Par le point  $P$  menons au cycle  $K$  la tangente  $Pc$  qui est distincte de  $\Theta$ ; il est clair, d'après la proposition précédente, que cette semi-droite est également tangente à l'hypercycle, et qu'en faisant varier le cycle  $K$ , qui est assujéti à la seule condition de toucher les tangentes  $A\alpha$  et  $A\alpha'$ , on obtiendra ainsi toutes les tangentes à la courbe.

Remarquons maintenant que le cycle qui touche à la fois les tangentes  $A\alpha$ ,  $A\alpha'$ ,  $PC$  est précisément le cycle  $K$ , que celui qui touche  $PC$  et les deux tangentes opposées  $PP'$  et  $P'P$  se réduit au point  $P$ ; enfin que, des

deux tangentes communes à ces cycles, l'une est C et l'autre la semi-droite  $\Theta$  dont la direction reste constante, quelle que soit la tangente PC considérée; nous pourrons alors énoncer la proposition fondamentale suivante :

THÉORÈME I. — Soient A, A' et B, B' deux couples de tangentes à un hypercycle cubique H et T une tangente quelconque à cette courbe; construisons les deux cycles qui touchent respectivement A, A' et T, B, B' et T; ces deux cycles ont T pour tangente commune, la seconde tangente commune  $\Theta$  est parallèle à une semi-droite fixe.

Il suffit, pour démontrer ce théorème, de remarquer qu'une transformation par semi-droites réciproques transforme un hypercycle cubique en une courbe de même espèce et que l'on peut toujours effectuer la transformation de telle sorte que les tangentes B et B' se transforment en une tangente double apparente de la courbe transformée; auquel cas le théorème résulte immédiatement des remarques qui précèdent.

6. Le théorème précédent donne une propriété remarquable de *six tangentes quelconques* à un hypercycle. En voici d'autres conséquences :

Étant donnés deux couples de semi-droites fixes A, A' et B, B' et une direction fixe  $\Theta_0$ , menons une semi-droite quelconque  $\Theta$  parallèle à  $\Theta_0$ , puis construisons les cycles qui touchent respectivement A, A' et  $\Theta$ , B, B' et  $\Theta$ . Ces cycles, qui touchent  $\Theta$ , ont en outre une deuxième tangente commune T; cette tangente, lorsque  $\Theta$  se déplace parallèlement à elle-même, enveloppe un hypercycle cubique tangent à A, A', B et B'.

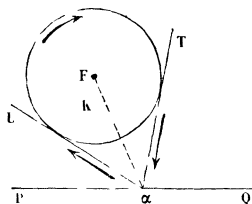
Si l'on fait varier la direction  $\Theta_0$ , on déterminera

ainsi tous les hypercycles cubiques qui touchent les quatre semi-droites A, A', B et B'.

7. Comme application, supposons que les tangentes A et A' soient les tangentes isotropes issues du foyer F de la courbe et que les tangentes B et B' soient les semi-droites opposées définies par la tangente double apparente PQ.

En désignant par T une tangente quelconque à l'hypercycle, on voit que le cycle, qui touche T et les droites isotropes issues de F, est le cycle K qui a précisément

Fig. 3.



F pour centre; le cycle qui touche T, B et B' se réduit au point de rencontre  $\alpha$  de T et de PQ. La seconde tangente commune à ces deux cycles est la semi-droite U qui est l'antisymétrique de T par rapport à la droite  $\alpha F$ .

On peut donc énoncer la proposition suivante, qu'il serait très facile du reste de démontrer directement :

*Un hypercycle ayant pour foyer le point F et pour tangente double la droite PQ, si  $\alpha$  désigne le point où une semi-droite quelconque T tangente à la courbe coupe la droite PQ, l'antisymétrique de T relativement à la droite F $\alpha$  a une direction constante.*

## II.

8. Étant données quatre semi-droites quelconques  $A_1, A_2, A_3$  et  $A_4$ , construisons les bissectrices ( $A_1, A_2$ ),



$(A_1, A_3), (A_1, A_2)$  (<sup>1</sup>); les foyers des paraboles qui touchent ces trois droites sont les foyers des hypercycles cubiques qui touchent les semi-droites données; on sait d'ailleurs, par un théorème connu, que le lieu des foyers de ces paraboles est le cercle circonscrit au triangle déterminé par les trois bissectrices.

Ainsi le lieu des foyers des hypercycles cubiques qui touchent quatre semi-droites données est un cercle  $K$ , et, comme il est facile de le voir, ce cercle est celui qui contient les centres des quatre cycles inscrits dans les triangles que l'on peut former avec les semi-droites données en les prenant trois à trois.

Soient  $K_1, K_2$  et  $K_3$  trois de ces cycles et  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  leurs centres;  $F$  désignant le foyer de l'un quelconque  $H$  des hypercycles qui touchent les semi-droites données  $A_1, A_2, A_3$  et  $A_4$ , il résulte de ce qui précède que  $F, \alpha_1, \alpha_2$  et  $\alpha_3$  sont situés sur le cercle  $K$ .

En d'autres termes, si l'on appelle  $I$  et  $J$  les deux ombilics du plan, le rapport anharmonique des semi-droites  $FI, \alpha_1 I, \alpha_2 I$  et  $\alpha_3 I$  est égal au rapport anharmonique des semi-droites  $FJ, \alpha_1 J, \alpha_2 J$  et  $\alpha_3 J$ ; ce que l'on peut encore énoncer de la façon suivante :

Si l'on mène à l'hypercycle  $H$  et aux cycles  $K_1, K_2$  et  $K_3$  des tangentes parallèles à une droite isotrope d'un système, puis des tangentes parallèles à une droite isotrope de système différent, les deux systèmes de semi-droites ainsi obtenues ont même rapport anharmonique.

Remarquons maintenant qu'une transformation par semi-droites réciproques transforme un hypercycle cu-

(<sup>1</sup>) Je rappelle que je désigne par la notation  $(C, D)$  la bissectrice de deux semi-droites données  $C$  et  $D$ , c'est-à-dire la *droite parfaitement déterminée* qui est le lieu des centres des cycles qui touchent ces semi-droites.

bique en une courbe de même espèce, que le rapport anharmonique de quatre semi-droites parallèles se conserve après la transformation et que la transformation peut toujours être choisie de façon que deux semi-droites prises arbitrairement aient pour transformées des droites isotropes : nous en concluons immédiatement que la proposition précédente subsiste pour des directions quelconques prises dans le plan.

D'où le théorème suivant :

**THÉORÈME II.** — Soient  $A_1, A_2, A_3$  et  $A_4$  quatre semi-droites et  $K_1, K_2, K_3$  les cycles inscrits dans les triangles que l'on peut former en adjoignant successivement à  $A_4$  deux quelconques des semi-droites  $A_1, A_2$  et  $A_3$ ; soit de plus  $H$  un hypercycle cubique quelconque qui touche les semi-droites données. Cela posé, si l'on mène à la courbe et aux trois cycles des tangentes parallèles à une direction quelconque, le rapport anharmonique de ces quatre semi-droites est constant.

On peut encore l'énoncer ainsi qu'il suit :

**THÉORÈME III.** — Étant donnés trois cycles qui touchent une même semi-droite  $\Delta$ , si une semi-droite  $T$  se déplace de telle sorte que le rapport anharmonique de cette semi-droite et des tangentes, menées aux trois cycles dans une direction parallèle, ait une valeur constante  $k$ ,  $T$  enveloppe un hypercycle cubique tangent à  $\Delta$  et aux trois semi-droites qui touchent à la fois deux des cycles donnés (1).

*Remarque.* — En faisant varier le nombre  $k$ , on dé-

(1) Si les trois cycles donnés n'étaient pas tangents à une même semi-droite, l'enveloppe de  $T$  serait un hypercycle de la quatrième classe : je reviendrai sur ce sujet.

terminera ainsi tous les hypercycles qui touchent les quatre semi-droites dont je viens de parler.

9. Considérons le faisceau des hypercycles cubiques qui touchent quatre semi-droites données  $A_1, A_2, A_3$  et  $A_4$ . Soient  $\Delta$  et  $\Delta'$  deux semi-droites prises arbitrairement; à chacune des courbes du faisceau on peut circonscrire un angle, et un seul, dont les côtés soient parallèles à  $\Delta$  et à  $\Delta'$ ; il résulte de ce qui précède que *le lieu du sommet de cet angle est une conique dont les asymptotes sont parallèles à  $\Delta$  et à  $\Delta'$* .

En particulier, quand les semi-droites  $\Delta$  et  $\Delta'$  viennent à se confondre, on obtient la proposition suivante :

*Si, à chacune des courbes du faisceau, on mène une tangente parallèle à une semi-droite donnée  $\Delta$ , le lieu du point de contact est une parabole dont l'axe est parallèle à  $\Delta$ .*

### III.

10. L'étude des courbes de direction de la troisième classe se rattache à un autre genre de considérations d'une grande importance dans la théorie générale des courbes de direction.

Étant donné dans un plan fixe une droite quelconque  $D$ , on peut, par cette droite, mener deux plans isotropes qui sont distincts si la droite n'est pas elle-même une droite isotrope; nous rattacherons respectivement ces deux plans aux deux semi-droites  $\Delta$  et  $-\Delta$  déterminés par la droite  $D$ .

Ainsi, par toute semi-droite du plan, passera *un plan isotrope parfaitement déterminé*. Cela posé, étant donnée une courbe quelconque de direction  $K$ , si l'on imagine les divers plans isotropes qui contiennent les tangentes à cette courbe, ces plans envelopperont une

surface  $\Sigma$ ; en d'autres termes, si l'on considère la *développable isotrope* <sup>(1)</sup> *complète* qui est circonscrite à  $K$ , cette développable se décompose en deux surfaces distinctes qui correspondent à  $K$  et à la courbe qui lui est opposée.

11. Il résulte de là que la classification des courbes planes de direction se ramène à la classification des surfaces développables isotropes.

Étant donnée une surface développable isotrope  $\Sigma$  de classe  $r$ , tout plan sécant  $P$  la coupe suivant une courbe de direction  $K$  qui est de la même classe. Je ferai remarquer en outre qu'en désignant par  $\Theta$  l'arête de rebroussement de  $\Sigma$  la projection orthogonale de  $\Theta$  sur le plan  $P$  est la développée de la courbe  $K$  suivant laquelle le plan coupe la développable.

Les cônes isotropes qui ont pour sommets les divers points de  $\Theta$  coupent le plan  $P$  suivant les cycles osculateurs de la courbe  $K$ .

12. On voit, en particulier, que l'étude des courbes de direction de la troisième classe se ramène à celles des développables isotropes de troisième classe et ces courbes sont toutes de la même espèce, puisqu'il n'y a qu'une seule espèce de développables de la troisième classe.

Soient  $\Theta$  une cubique gauche isotrope et  $\Sigma$  la développable isotrope dont elle est l'arête de rebroussement; on voit que toute section plane de  $\Sigma$  est un hypercycle cubique (en d'autres termes, une anticaustique par ré-

---

(1) J'appelle *développable isotrope* une surface développable dont toutes les génératrices sont des droites isotropes et dont, par suite, les plans osculateurs sont des plans isotropes. Voir, à ce sujet, mon *Mémoire sur l'emploi des imaginaires en Géométrie* (*Nouvelles Annales*, 2<sup>e</sup> série, t. XI; 1872).

Des considérations analogues à celles que je développe ici ont été employées par M. Stephanos dans diverses Communications orales faites à la *Société mathématique de France*.

flexion de la parabole, les rayons incidents étant parallèles); la projection orthogonale de  $\Theta$  sur un plan quelconque est par suite une caustique de parabole.

13. Comme application, considérons un hypercycle cubique  $K$ ; soient  $\Sigma$  la développable qui est l'enveloppe des plans isotropes, qui contiennent les diverses tangentes à l'hypercycle, et  $\Theta$  la cubique gauche qui forme son arête de rebroussement.

Considérons trois tangentes quelconques  $A$ ,  $B$  et  $C$  à l'hypercycle; désignons respectivement par  $a$ ,  $b$  et  $c$  les points où elles touchent la courbe et par  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  les points où les plans isotropes menés par  $A$ ,  $B$  et  $C$  touchent la cubique  $\Theta$ . Ces plans osculateurs de  $\Sigma$  se coupent en un point  $\delta$  qui, d'après un théorème connu, est situé dans le plan déterminé par les trois points  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$ ; soit  $T$  la droite suivant laquelle ce plan coupe le plan  $P$  de l'hypercycle  $K$ .

Les cônes isotropes ayant respectivement pour sommets  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  coupent le plan  $P$  suivant les trois cycles  $R_a$ ,  $R_b$  et  $R_c$  qui osculent  $K$  aux points  $a$ ,  $b$  et  $c$ , et l'axe de similitude de ces trois cycles est évidemment la droite  $T$ . Le cône isotrope ayant pour sommet le point  $\delta$  a pour trace sur le plan  $P$  le cycle inscrit dans le triangle  $ABC$  et, comme le point  $\delta$  est dans le plan  $\alpha\beta\gamma$ , il en résulte que le centre de similitude de ce cycle et de l'un quelconque des cycles  $R_a$ ,  $R_b$  et  $R_c$  est situé sur  $T$ .

On peut donc énoncer la proposition suivante :

*Étant donnés trois points quelconques  $a$ ,  $b$ ,  $c$  d'un hypercycle cubique, si l'on imagine les cycles  $R_a$ ,  $R_b$  et  $R_c$  qui osculent la courbe en ces points et le cycle  $R$  qui touche les tangentes menées en ces mêmes points, les six centres de similitude de ces quatre cycles considérés deux à deux sont sur une même droite.*

14. On doit remarquer en particulier le cas où le plan, qui contient les points  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$ , est un plan isotrope; la proposition précédente peut alors s'énoncer ainsi qu'il suit :

*Étant donné un hypercycle cubique  $K$  et une semi-droite arbitraire  $\Delta$  située dans son plan; il y a trois cycles osculateurs de  $K$  qui touchent  $\Delta$ . Les tangentes menées aux points d'osculatation et la semi-droite  $\Delta$  sont tangentes à un même cycle.*

15. J'énoncerai encore le corollaire suivant :

*Si, par un point quelconque  $P$ , pris dans le plan d'un hypercycle cubique  $K$ , on mène des tangentes à la courbe et si l'on considère les trois cycles qui l'osculent aux points de contact, l'axe de similitude de ces trois cycles passe par le point  $P$ .*