

MAURICE D'OCAGNE

**Étude de deux systèmes simples
de coordonnées tangentielles dans
le plan : coordonnées parallèles et
coordonnées axiales**

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 3
(1884), p. 410-423

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1884_3_3_410_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1884, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*

<http://www.numdam.org/>

ÉTUDE DE DEUX SYSTÈMES SIMPLES DE COORDONNÉES TANGENTIELLES DANS LE PLAN : COORDONNÉES PARALLÈLES ET COORDONNÉES AXIALES ⁽¹⁾;

PAR M. MAURICE D'OCAGNE,
Élève-Ingénieur des Ponts et Chaussées.

1. L'étude que nous allons présenter se rapporte à la Géométrie plane.

(¹) Rappelons ici que les coordonnées tangentielles que Clebsch appelle les *coordonnées lignes* sont les inverses de l'abscisse et de

Nous avons choisi, parmi les très nombreux systèmes de coordonnées tangentielles que l'on peut considérer, les deux qui nous ont paru les plus simples, l'un correspondant aux coordonnées rectilignes ordinaires, l'autre aux coordonnées polaires, et nous les avons étudiés avec quelque détail; ce travail, où se trouvent exposés nos principaux résultats, constitue donc, pour ainsi dire, l'esquisse d'un Traité de Géométrie analytique fondé sur l'emploi des coordonnées spéciales que nous envisageons. Aussi n'insistons-nous que sur les points où ces coordonnées offrent quelque particularité, laissant de côté les propriétés communes à tous les systèmes de coordonnées tangentielles, qui ont souvent été exposées et que chacun connaît.

Cette étude nous a en outre conduit à une méthode de transformation géométrique qui est exposée dans les §§ IX et X.

Qu'il nous soit enfin permis d'attirer l'attention du lecteur sur la courbe dont l'étude assez détaillée fait l'objet du n° 50, et qui donnera lieu, sans doute, à de nouvelles remarques.

COORDONNÉES PARALLÈLES.

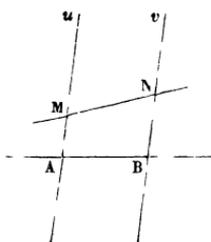
I. — COORDONNÉES DE LA DROITE.

2. On donne deux points A et B, dits *origines des coordonnées*, et, par ces points, deux droites parallèles Au et Bv, dites *axes des coordonnées* (*fig. 1*).

l'ordonnée à l'origine d'une droite rapportée à deux axes concourant, Ox et Oy; on les désigne d'habitude par les lettres u et v; les coordonnées que nous désignons plus loin par ces deux lettres sont différentes des précédentes.

On porte sur les axes des segments $AM = u$ et

Fig. 1.

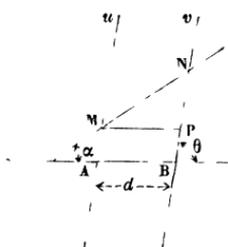


$BN = v$, comptés positivement dans le sens de A vers u , et de B vers v , et négativement dans l'autre sens. On détermine ainsi deux points M et N. Les longueurs u et v , prises avec leurs signes, seront dites les *coordonnées de la droite MN*.

3. *Angle d'une droite quelconque avec l'axe AB des origines.* — Les constantes particulières à chaque système de coordonnées sont l'angle θ que les axes de coordonnées font avec l'axe des origines, et la distance d de ces origines.

Voyons comment, en fonction de ces quantités et des coordonnées u et v d'une droite, s'exprime l'angle α que fait cette droite avec l'axe des origines.

Fig. 2.



Menant par le point M (*fig. 2*) la parallèle MP à AB ,

(413)

on a

$$\frac{\sin \text{NMP}}{\sin \text{MNP}} = \frac{\text{NP}}{\text{MP}} \quad \text{ou} \quad \frac{\sin \alpha}{\sin(\theta - \alpha)} = \frac{v - u}{d},$$

d'où l'on tire aisément

$$(1) \quad \text{tang } \alpha = \frac{(v - u) \sin \theta}{d + (v - u) \cos \theta}.$$

4. *Angle de deux droites.* — α et α' étant les angles que ces droites font respectivement avec l'axe AB, on a

$$V = \alpha' - \alpha.$$

Appliquant alors la formule

$$\text{tang } V = \frac{\text{tang } \alpha' - \text{tang } \alpha}{1 + \text{tang } \alpha' \text{ tang } \alpha},$$

on trouve

$$(2) \quad \text{tang } V = \frac{d[(v' - u') - (v - u)] \sin \theta}{d^2 + (v' - u')(v - u) + d[(v' - u') - (v - u)] \cos \theta}.$$

La condition de parallélisme de deux droites est donc

$$(3) \quad v' - u' = v - u,$$

ce qui était évident *a priori*, et la condition de perpendicularité,

$$(4) \quad d^2 + (v' - u')(v - u) + d[(v' - u') + (v - u)] \cos \theta = 0;$$

si l'angle θ est droit, cette dernière condition se réduit à

$$(4') \quad d^2 + (v' - u')(v - u) = 0.$$

5. *Droite moyenne.* — Étant données des droites $(u_1, v_1), (u_2, v_2), \dots, (u_m, v_m)$ en nombre quelconque m , nous appellerons *droite moyenne* de ces m droites celle dont les coordonnées sont

$$\frac{u_1 + u_2 + \dots + u_m}{m} \quad \text{et} \quad \frac{v_1 + v_2 + \dots + v_m}{m}.$$

On voit que cette droite (D) est telle que, si une sécante

parallèle aux axes la coupe au point D et coupe les droites données aux points D_1, D_2, \dots, D_m , le point D est le centre des moyennes distances des points D_1, D_2, \dots, D_m . Nous exprimerons ce fait en disant que la droite (D) est *moyenne* des droites données par rapport à la direction de cette sécante.

Transformation des coordonnées.

6. *Changement de l'axe des origines.* — On prend pour nouvel axe des origines une droite A_1B_1 , déterminée par ses coordonnées $AA_1 = a$ et $BB_1 = b$. Les formules de transformation sont, dans ce cas,

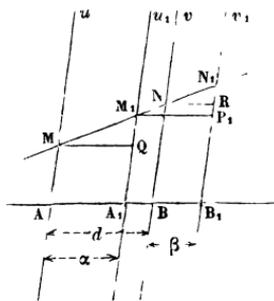
$$(5) \quad u = u_1 + a,$$

$$(5') \quad v = v_1 + b,$$

u et v étant les coordonnées d'une droite rapportée aux origines A, B , et u_1 et v_1 les coordonnées de la même droite rapportée aux origines A_1 et B_1 .

7. *Changement des axes de coordonnées parallèlement à eux-mêmes, en conservant le même axe des origines.* — Soient Au et Bv les anciens axes, A_1u_1 et B_1v_1 les nouveaux (fig. 3).

Fig. 3.



Appelons α la distance de Au et A_1u_1 , comptée paral-

lément à AB et β la distance de Bv et B_1v_1 . La similitude des triangles MM_1Q , NN_1R et $M_1N_1P_1$ donne

$$\frac{u_1 - u}{\alpha} = \frac{v_1 - v}{\beta} = \frac{v_1 - u_1}{d + \beta - \alpha},$$

d'où l'on tire

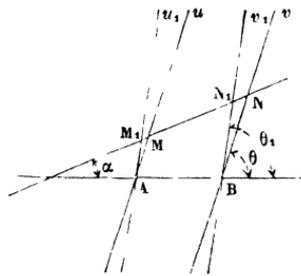
$$(6) \quad u = \frac{(d + \beta)u_1 - \alpha v_1}{d + \beta - \alpha}$$

et

$$(6') \quad v = \frac{(d - \alpha)v_1 + \beta u_1}{d + \beta - \alpha}.$$

8. *Changement des axes de coordonnées dans une direction quelconque, en conservant les mêmes origines.* — Soient Au et Bv les anciens axes, et Au_1 et Bv_1

Fig. 1.



les nouveaux (fig. 1). On a, dans les triangles AMM_1 et BNN_1 ,

$$\frac{u}{u_1} = \frac{v}{v_1} = \frac{\sin(\theta_1 - \alpha)}{\sin(\theta_1 - \alpha)} = \frac{\sin \theta_1 - \cos \theta_1 \tan \alpha}{\sin \theta_1 - \cos \theta_1 \tan \alpha};$$

or

$$\tan \alpha = \frac{(v_1 - u_1) \sin \theta_1}{d + (v_1 - u_1) \cos \theta_1};$$

on en déduit, après réduction,

$$(7) \quad \frac{u}{u_1} = \frac{v}{v_1} = \frac{d \sin \theta_1}{d \sin \theta_1 - (v_1 - u_1) \sin(\theta_1 - \theta)}.$$

Cette substitution, faite dans une équation algébrique $F(u, v) = 0$, n'altère pas le degré de cette équation, non plus que les deux premières substitutions, ce qui devait avoir lieu.

9. *Transformation générale.* — Toute transformation peut se décomposer en plusieurs autres qui rentrent dans les cas précédents.

Soit, par exemple, à passer d'un système (Au, Bv) à un autre (A_1u_1, B_1v_1) qui lui est parallèle.

Appelons A_2 et B_2 les points où la droite A_1B_1 coupe respectivement Au et Bv . Nous passerons du système (Au, Bv) au système (A_2u, B_2v) par la première transformation, puis du système (A_2u, B_2v) au système (A_1u_1, B_1v_1) par la deuxième.

Soit maintenant à passer du système (Au, Bv) à un système (A_1u_1, B_1v_1) quelconque.

Appelons A_2 le point de rencontre de Au et A_1u_1 , B_2 le point de rencontre de Bv et B_1v_1 . Nous passerons du système (Au, Bv) au système (A_2u, B_2v) par la première transformation, puis du système (A_2u, B_2v) au système (A_2u_1, B_2v_1) par la troisième, et enfin du système (A_2u_1, B_2v_1) au système (A_1u_1, B_1v_1) par la première.

II. — ÉQUATION DU POINT.

10. Si l'on considère un point fixe P et une droite variable MN passant par ce point, il existera entre les coordonnées de cette droite une relation qui sera l'équation du point P .

Cette relation est facile à établir. Tirons AP et BP (*fig. 5*), et posons

$$AA' = \alpha. \quad BB' = \beta.$$

(417)

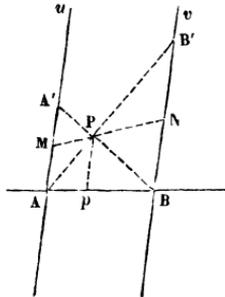
Nous aurons, pour une position quelconque de la droite MN,

$$\frac{BN}{MA'} = \frac{AM}{NB'}$$

ou

$$\frac{v}{x-u} = \frac{\beta-v}{u},$$

Fig. 5.



ou encore

$$\frac{u}{x} + \frac{v}{\beta} = 1;$$

telle sera l'équation du point P.

11. Réciproquement, toute équation du premier degré représente un point. Soit, par exemple,

$$Au + Bv + C = 0$$

une relation à laquelle satisfont constamment les coordonnées de la droite MN. On voit facilement, et c'est d'ailleurs un résultat bien connu, que la droite ainsi définie passe constamment par le point P tel que, si Pp est parallèle aux axes de coordonnées, on a

$$(8) \quad \frac{pA}{pB} = -\frac{B}{A},$$

$$(9) \quad pP = \gamma = \frac{-C}{A+B}.$$

Pour que le point P soit sur l'axe des origines, il faut que γ , et par suite C soit nul. L'équation d'un tel point est donc

$$Au + Bv = 0.$$

Pour que le point P soit à l'infini, il faut que γ soit infini, et par suite que $A + B = 0$.

Si le point P est sur Au, son équation se réduit à

$$Au + C = 0;$$

sur Bv,

$$Bv + C = 0.$$

Coordonnées de la droite AP,

$$u = 0, \quad v = -\frac{C}{B};$$

coordonnées de la droite BP,

$$v = 0, \quad u = -\frac{C}{A}.$$

Pour le point à l'infini dans la direction des axes, $A = 0$, $B = 0$; l'équation de ce point sera donc $C = 0$.

12. Si l'équation du point est mise sous la forme

$$u = mv + n,$$

on a

$$n = \lambda A' \quad \text{et} \quad m = \frac{\rho A}{\rho' B}.$$

Remarquons enfin que, si A et B sont de même signe, le point P est entre les axes de coordonnées; s'ils sont de signes contraires, le point P est en dehors de ces axes.

13. *Point de rencontre de deux droites.* — Soient les droites définies par les coordonnées (u_1, v_1) et (u_2, v_2) . On a immédiatement, pour l'équation de leur

point de rencontre,

$$(10) \quad \begin{vmatrix} u & v & 1 \\ u_1 & v_1 & 1 \\ u_2 & v_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

ou

$$(10') \quad \frac{u - u_1}{u_2 - u_1} = \frac{v - v_1}{v_2 - v_1}.$$

14. *Condition pour que trois droites passent au même point.* — Cette condition sera, d'après ce qui précède,

$$(11) \quad \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & 1 \\ u_2 & v_2 & 1 \\ u_3 & v_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

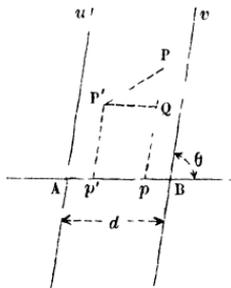
15. *Equation générale des points situés sur une droite donnée.* — Si u_1 et v_1 sont les coordonnées de la droite donnée, l'équation de tout point situé sur cette droite sera de la forme

$$(12) \quad u - u_1 = \lambda(v - v_1),$$

λ étant égal à $\frac{PM}{PN}$.

16. *Distance de deux points.* — Soient (fig. 6) deux

Fig. 6.



points P et P' ayant pour équations

$$Au + Bv + C = 0$$

et

$$A'u + B'v + C' = 0.$$

Menons par les points P et P' les parallèles Pp et P'p' aux axes, et par le point P' la parallèle P'Q à AB; nous aurons

$$PP'^2 = \hat{c}^2 = PQ^2 + P'Q^2 + 2PQ \cdot P'Q \cos \theta;$$

or

$$PQ = Pp - P'p' = \frac{-C}{A+B} - \frac{-C'}{A'+B'},$$

et, en appelant d la distance AB,

$$P'Q = Ap - A'p' = \frac{Bd}{A+B} - \frac{B'd}{A'+B'};$$

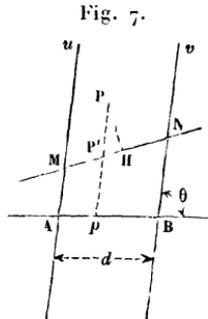
donc

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{l} \hat{c}^2 = \left(\frac{C}{A+B} - \frac{C'}{A'+B'} \right)^2 + d^2 \left(\frac{B}{A+B} - \frac{B'}{A'+B'} \right)^2 \\ \quad - 2 \left(\frac{C}{A+B} - \frac{C'}{A'+B'} \right) \left(\frac{B}{A+B} - \frac{B'}{A'+B'} \right) d \cos \theta. \end{array} \right.$$

17. *Distance d'un point à une droite.* — Soient le point P dont l'équation est

$$Au + Bv + C = 0,$$

et la droite MN dont les coordonnées sont u_1 et v_1



(fig. 7). Abaissons du point P la perpendiculaire PH sur MN, et menons parallèlement aux axes la droite Pp

qui coupe MN au point P'. Nous avons

$$PH = PP' \sin PP'H = (Pp - P'p) \sin(\theta - \alpha),$$

α étant l'angle de la droite MN avec AB.

Or nous avons vu que

$$Pp = \frac{-C}{A+B};$$

pour P'p, on a

$$\frac{P'p - u_1}{v_1 - u_1} = \frac{Ap}{AB} = \frac{B}{A+B},$$

d'où

$$P'p = \frac{A u_1 + B v_1}{A+B};$$

enfin on a

$$\frac{\sin(\theta - \alpha)}{\sin \alpha} = \frac{d}{v_1 - u_1},$$

d'où

$$\text{tang}(\theta - \alpha) = \frac{d \sin \theta}{v_1 - u_1 + d \cos \theta}$$

et

$$\sin(\theta - \alpha) = \pm \frac{d \sin \theta}{\sqrt{d^2 + (v_1 - u_1)^2 + 2d(v_1 - u_1) \cos \theta}}.$$

Il vient, par suite, pour l'expression de PH,

$$(14) \quad PH = \mp \frac{(A u_1 + B v_1 + C) d \sin \theta}{(A+B) \sqrt{d^2 + (v_1 - u_1)^2 + 2d(v_1 - u_1) \cos \theta}}.$$

Si l'on veut, par exemple, la distance δ de l'origine A à la droite (u_1, v_1) , on aura, en appliquant la formule précédente,

$$(14') \quad \delta = \mp \frac{u_1 d \sin \theta}{\sqrt{d^2 + (v_1 - u_1^2)^2 + 2d(v_1 - u_1) \cos \theta}}.$$

18. *Droites et points imaginaires.* — Nous appellerons *droites imaginaires* les droites dont les coordonnées seront de la forme

$$u = a + bi, \quad v = c + di.$$

Deux droites seront dites *imaginaires conjuguées*

quand leurs coordonnées seront respectivement conjuguées. La première aura pour équation

$$u = a + bi, \quad v = c - di;$$

la seconde

$$u = a - bi, \quad v = c + di.$$

La droite médiane de deux droites imaginaires conjuguées est réelle; ses coordonnées sont en effet a et c .

Le point de rencontre de deux droites imaginaires conjuguées est réel; son équation est, en effet,

$$\frac{v - c - di}{2 di} = \frac{u - a - bi}{2 bi}$$

ou

$$\frac{v - c}{d} = \frac{u - a}{b}.$$

Un point est dit *imaginaire* lorsque les coefficients de son équation sont imaginaires :

$$(A - Bi)u - (C - Di)v - E + Fi = 0.$$

Point imaginaire conjugué

$$(A + Bi)u + (C + Di)v + E - Fi = 0.$$

En écrivant les équations

$$Au + Cv - E - i(Bu - Dv + F) = 0$$

et

$$Au + Cv + E - i(Bu - Dv + F) = 0,$$

on voit que ces deux points se trouvent sur la droite qui joint les points réels dont les équations sont

$$Au + Cv - E = 0 \quad \text{et} \quad Bu + Dv + F = 0.$$

19. THÉORÈME. — *Toute équation homogène de degré m en u et v représente un système de m points réels ou imaginaires situés sur l'axe des origines.*

(423)

Nous exprimerons ce fait en disant qu'une telle équation représente une ponctuelle située sur l'axe des origines.

(*A suivre.*)