NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

J.-E. ESTIENNE

# Quelques réflexions sur l'étude géométrique des courbes géométriques et théorèmes pouvant y être utiles

*Nouvelles annales de mathématiques 3e série*, tome 4 (1885), p. 131-138

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1885_3_4__131_0>

# QUELQUES RÉFLEXIONS SUR L'ÉTUDE GÉOMÉTRIQUE DES COURBES GÉOMÉTRIQUES ET THÉORÈMES POUVANT Y ÊTRE UTILES

(SUITE);

PAR M. J.-E. ESTIENNE.

---

## RÉFLEXIONS ET THÉORÈMES SUR LES SURFACES DU SECOND ORDRE OU QUADRIQUES.

On a essayé vainement de trouver, au moyen de théorèmes analogues à ceux qui précèdent, une relation graphique symétrique entre dix points d'une quadrique.

Les travaux de M. P. Serret ont donné le moyen de constater graphiquement que dix points sont sur une quadrique; un grand progrès a été ainsi réalisé; mais on ne peut s'empêcher de regretter la complication et le manque de symétrie des constructions. Il est difficile, par suite de cette dissymétrie, d'embrasser ces constructions d'un coup d'œil, pour les utiliser avec précision dans les investigations ultérieures.

Tous les théorèmes qui permettent de reconnaître qu'un point est sur une courbe ou sur une surface définie par un nombre convenable de points s'équivalent théoriquement; chacun d'eux constitue, comme on l'a dit déjà, une équation géométrique de la courbe ou de la surface. Dans l'application, on s'adressera à l'une ou à l'autre des formes de cette équation, plus commode dans le cas particulier; mais l'avantage de l'élégance et de la fécondité est certainement à l'énoncé *symétrique*, c'est-à-dire dans lequel tous les points donnés entrent de la même manière.

On a donné, par exemple, un grand nombre de formes à l'équation géométrique des coniques, entre autres les suivantes :

Le théorème de Pascal ;

Le théorème de Desargues ;

Le théorème de Chasles, sur la constance du rapport anharmonique du faisceau dont le centre est sur une conique et dont les rayons passent par quatre points fixes de cette conique.

Tous ces théorèmes peuvent servir à étudier les coniques ; mais quel est celui qui a été toujours regardé comme le plus beau, le plus élégant, le plus séduisant ? C'est le seul d'entre eux qui soit symétrique, le puissant théorème de Pascal.

Cette symétrie, objet des vœux du géomètre, l'analyste la rencontre naturellement et sans effort, mais aussi sans grand profit, en écrivant le déterminant qui, égalé à o, exprime que $\frac{n(n+3)}{2}+1$ points sont sur une courbe d'ordre $n$.

Les géomètres qui ont cherché l'analogue du théorème de Pascal pour les quadriques ont remarqué très justement qu'on doit trouver trois théorèmes de l'espace correspondant à l'unique théorème de Pascal dans le plan.

Le premier exprimerait que dix points sont sur une quadrique ;

Le second, que neuf points sont sur une courbe gauche du quatrième ordre (intersection de deux quadriques) ;

Le troisième, que huit points sont septaires. (Nous exprimerons, par cette locution abrégée, que les huit points sont tels que toute quadrique, passant par sept d'entre eux, passe par le huitième.)

Le premier de ces théorèmes qui exprime qu'une condition simple est satisfaite a très probablement la forme suivante : *Si dix points sont sur une quadrique, quatre certains points qui s'en déduisent sont dans un même plan, ou bien quatre certains plans qui s'en déduisent passent par un même point.*

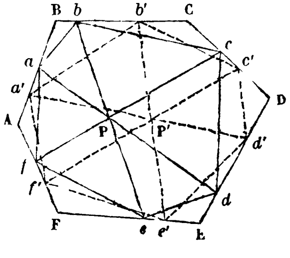
Le second exprimerait de même la condition double que son énoncé suppose satisfaite (un point situé sur une courbe déterminée) par le fait que trois points sont en ligne droite, ou que trois plans passent par une même droite.

Quant au troisième théorème, le seul que nous ayons complètement résolu, il doit permettre de trouver le huitième point commun à toutes les quadriques passant par sept points donnés. Comme la détermination du point exige trois conditions, il doit exprimer une condition triple; par exemple, et c'est ce qui a lieu, que quatre droites sont sur un hyperboloïde.

Parmi les formes connues de ce troisième théorème, la plus élégante est, je crois, la suivante, due à un illustre géomètre, M. Hesse :

Théorème de Hesse. — *Si huit points* A, B, C, D, E, F, P, P′ *sont septaires, en formant l'hexagone gauche*

Fig. 4.




ABCDEF, *et menant par le point* P *les trois droites qui coupent les côtés opposés de cet hexagone aux points* *a, b, c, d, e, f, qu'on prend pour sommets successifs d'un nouvel hexagone, les côtés de cet hexagone et ceux de l'hexagone analogue qu'on obtiendrait en partant du point P' sont douze génératrices d'un même hyperboloïde (fig. 4).*

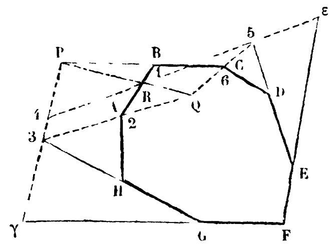
Ce remarquable théorème laisse à désirer, en ce sens qu'il manque de symétrie, qu'il conduit à une construction difficile du huitième point, et enfin qu'il n'est pas l'analogue d'un théorème sur les coniques.

Nous proposerons le théorème suivant, symétrique et d'une analogie flagrante avec le théorème de Pascal :

Théorème. — *Si les huit sommets d'un octogone gauche sont septaires, ses faces opposées se coupent en quatre droites, qui sont des génératrices d'un même hyperboloïde (fig. 5).*

Soit ABCDEFGH l'octogone gauche; il est facile de voir qu'il suffit de démontrer que l'une quelconque de

Fig. 5.




ses faces, ABC par exemple, coupe en trois points en ligne droite les intersections des trois groupes de faces opposées :

BCD et FGH (point P),
CDE et GHA (point Q),
DEF et HAB (point R).

Les points P, Q, R qu'on veut prouver être en ligne droite s'obtiennent de la façon suivante :

On prolonge les quatre côtés de l'octogone DE, EF, FG, GH jusqu'à leurs points d'intersection 5, $\varepsilon$, $\gamma$, 3 avec la face ABC;

P est alors l'intersection des droites $3\gamma$ et BC;

Q est l'intersection des droites A3 et C5;

R est l'intersection des droites $5\varepsilon$ et AB.

Appelons 4 l'intersection des droites $3\gamma$ et $5\varepsilon$, et désignons A par 2, B par 1, C par 6.

On voit, en considérant la figure, que les points P, Q, R sont à l'intersection des côtés opposés de l'hexagone-plan 123456.

R est l'intersection de 12 avec 45;

Q est l'intersection de 23 avec 56;

P est l'intersection de 34 avec 61.

Le théorème sera donc démontré si l'on prouve que cet hexagone 123456 est inscrit à une conique.

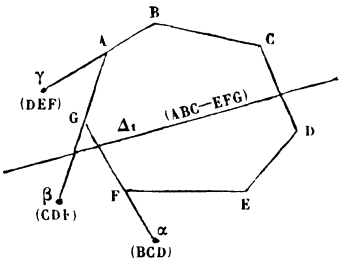
Or, dire que les huit sommets de l'octogone sont septaires revient à dire qu'on peut, par ces huit sommets et deux points quelconques de l'espace, faire passer une quadrique; en particulier, ces huit sommets et deux côtés quelconques de l'octogone sont sur une même quadrique.

Considérons la quadrique qui passe par ces huit sommets et par les côtés DE et GH. Cette quadrique coupe le plan ABC suivant une conique qui passe par les cinq points 1, 2, 3, 5, 6. Elle passe aussi par le point 4, car ce point 4 est, par construction, l'intersection du plan ABC avec la droite qui passe par le point F et rencontre les droites DE et HA. Cette droite, étant menée par un point de la quadrique considérée et rencontrant deux génératrices de cette quadrique, en est elle-même une génératrice, et le théorème est démontré.

Voyons à quelle construction conduit ce théorème pour la détermination du huitième point :

Soient A, B, C, D, E, F, G sept points quelconques

Fig. 6




dans l'espace; on veut trouver le huitième point H par où passent toutes les quadriques menées par les sept points donnés (*fig.* 6).

Cherchons à déterminer les quatre droites qui figurent dans l'énoncé précédent. L'une d'elles, la droite $\Delta_1$, intersection des plans ABC et EFG, est complètement déterminée.

Quant aux trois autres, intersections des plans

BCD et FGH ($\Delta_2$),
CDE et GHA ($\Delta_3$),
DEF et HAB ($\Delta_4$),

on connaît de chacune d'elles un point, et un plan dans lequel elle se trouve :

La droite $\Delta_2$ est dans le plan BCD et passe par le point $\alpha$ où le côté FG de l'heptagone ABCDEFG coupe la face opposée BCD. De même, $\Delta_3$ passe par $\beta$ et est dans le plan CDE, et $\Delta_4$ passe par $\gamma$ et est dans le plan DEF.

Le problème sera résolu si l'on détermine complètement ces trois droites par la condition qu'elles soient, avec la droite $\Delta_1$, quatre génératrices d'un même système d'un hyperboloïde. Le point H sera, en effet, à l'intersection de trois plans menés respectivement par les droites

$$\begin{matrix} \Delta_2 & \text{et} & FG, \\ \Delta_3 & \text{et} & GA, \\ \Delta_4 & \text{et} & AB. \end{matrix}$$

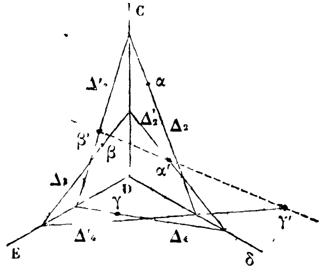
On voit aisément que ce problème n'est autre que le suivant :

On considère les trois faces de l'heptagone qui se coupent en D; on prend leurs intersections $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ avec les côtés opposés de l'heptagone; mener par ces trois points un hyperboloïde tangent à ces trois faces, et admettant pour génératrice la droite $\Delta_1$, intersection des plans ABC et EFG.

Il faut ajouter que la génératrice $\Delta_1$ et les génératrices $\Delta_2$, $\Delta_3$, $\Delta_4$ passant respectivement par les points $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ et situées dans les plans tangents sont d'un même système.

Or soient (*fig.* 7) DCE$\delta$ le trièdre formé par les trois

Fig. 7.




faces qui se coupent en D, et $\alpha'$, $\beta'$, $\gamma'$ les points d'intersection de ces faces avec la droite $\Delta_1$; si l'on mène par chacun de ces points les génératrices $\Delta'_2$, $\Delta'_3$, $\Delta'_4$ de l'hyperboloïde cherché, ces trois droites et les droites $\Delta_2$, $\Delta_3$, $\Delta_4$ se coupent sur les arêtes du trièdre.

En dernière analyse, le problème est donc ramené au suivant, très simple et dont la solution est bien connue :

*Étant donné un trièdre* DCE$\delta$, *et deux points dans chacune de ses faces,* $\alpha$ *et* $\alpha'$, $\beta$ *et* $\beta'$, $\gamma$ *et* $\gamma'$, *faire passer par ces points, pris dans l'ordre suivant :* $\alpha\beta'\gamma\alpha'\beta\gamma'$, *les côtés successifs d'un hexagone ayant ses sommets opposés sur chacune des arêtes du trièdre.*

Ce problème se résout indifféremment dans l'espace ou dans le plan, après projection.

(*A suivre.*)