Nouvelles annales de mathématiques

A. De Saint-Germain

Étude sur un théorème d'Abel relatif aux séries et sur un développement en série souvent utile en astronomie

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 4 (1885), p. 159-169

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1885_3_4__159_1>

ÉTUDE SUR UN THÉORÈME D'ABEL RELATIF AUX SÉRIES ET SUR UN DÉVELOPPEMENT EN SÉRIE SOUVENT UTILE EN ASTRONOMIE;

PAR M. A. DE SAINT-GERMAIN.

Considérons une série, ordonnée suivant les puissances positives et entières d'une variable z, et convergente tant que le module de z reste inférieur à un nombre R. Abel a montré que si, pour une valeur $Z = Re^{\omega i}$ de z, la série est encore convergente, sa somme A est la limite vers laquelle tend la somme de la série quand on donne à z une suite de valeurs dont les arguments sont tous égaux à ω, tandis que leurs modules, inférieurs à R, tendent vers cette limite. Dans le tome V de son Journal, Liouville expose une démonstration du théorème d'Abel, due à Dirichlet, mais qui présente, au moins dans la forme, une imperfection analogue à celle qu'on reprochait aux anciennes démonstrations relatives à la limite de $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$: on y considère un nombre qu'on prend d'abord fini, puis on le fait croître indéfiniment, ce qui ôte toute netteté au raisonnement; une simple modification de l'analyse de Dirichlet nous fournira une démonstration élémentaire et tout à fait rigoureuse du théorème d'Abel.

D'un autre côté, quelques géomètres, parmi lesquels on pourrait citer un de nos maîtres les plus savants, se sont demandé si l'on ne peut pas regarder comme évident, ou du moins démontrer en quelques mots, le théorème d'Abel ou même un théorème plus général comprenant celui d'Abel, et qu'on pourrait énoncer ainsi :

Quand une série, dont tous les termes sont des fonctions continues d'une variable réelle x, est convergente tant que x ne dépasse pas un nombre X, sa somme varie d'une manière continue avec x, même quand x atteint la limite X.

Un exemple nous prouvera que cette proposition n'est pas vraie; donc la démonstration intuitive à laquelle j'ai fait allusion est insuffisante et l'on ne pouvait apporter trop de soin à bien établir le théorème d'Abel; mais, de plus, j'explique la discontinuité de la série que je considère, et ce n'est pas sans jeter quelque jour sur une des propriétés les plus singulières des séries.

L'application du théorème d'Abel à des séries convenablement choisies donne des identités plus ou moins remarquables; je prendrai comme exemple le développement en série, entière par rapport à z, de la valeur de θ qui est définie par l'équation

$$\cos\theta = \cos\varphi + z.$$

et qui se réduit à φ pour $z = 0$. Cet exemple est choisi, moins en vue de l'égalité fournie par le théorème d'Abel, que parce qu'il me donnera l'occasion de calculer explicitement les coefficients de la série par une méthode avantageuse; la formule que nous obtiendrons, moins simple et moins étudiée qu'une formule analogue de Delambre, est au moins aussi utile en Analyse et en Astronomie.

Commençons par démontrer le théorème d'Abel. Soit

$$u_0 + u_1 z + u_2 z^2 + \ldots + u_p z^p + \ldots$$

la série considérée: nous supposons que, pour toutes les valeurs de z dont le module est inférieur à R, elle a une somme S, et pour $z = Z$ une somme A. Si l'on pose $u_p Z^p = v_p$, on a

$$(1) \qquad A = v_0 + v_1 + v_2 + \ldots + v_p + \ldots.$$

Pour les valeurs de z dont le module est $< R$, mais dont l'argument est le même que celui de Z, on aura $z = \lambda Z$, λ étant un nombre réel compris entre 0 et 1, et la somme de la série pourra s'écrire

$$S = v_0 + v_1 \lambda + v_2 \lambda^2 + \ldots + v_p \lambda^p + \ldots.$$

Pour établir le théorème d'Abel, il suffit évidemment de prouver que, si l'on prend $1 - \lambda$ suffisamment petit, le module de $A - S$ sera inférieur à un nombre donné quelconque ε. Nous y parviendrons en transformant convenablement l'expression de S.

Je désigne par A_p la somme des $p + 1$ premiers termes de la série (1), et par α_p le reste correspondant, de sorte qu'on a $A = A_p + \alpha_p$, et

$$v_p = A_p - A_{p-1}, \quad v_0 = A_0.$$

Dans S, remplaçons $v_0, v_1, \ldots v_m$ par les valeurs indiquées ci-dessus, et appelons ρ_m la somme de tous les termes qui suivent le $m+1^{\text{ième}}$ terme de la série, m étant un entier que je laisse provisoirement arbitraire; on aura

$$\begin{aligned} S &= A_0 + (A_1 - A_0)\lambda + (A_2 - A_1)\lambda^2 + \ldots + (A_m - A_{m+1})\lambda^m + \rho_m \\ &= (1-\lambda)(A_0 + A_1\lambda + \ldots + A_{m-1}\lambda^{m-1}) + A_m\lambda^m + \rho_m. \end{aligned}$$

J'introduis encore un autre entier n, que j'assujettis d'abord à la seule condition de ne pas dépasser m; puis, dans la parenthèse qui multiplie $(1-\lambda)$, je remplace les coefficients A_p, à partir de A_n inclusivement, par leur valeur $A - \alpha_p$: il vient

$$\begin{aligned} S = {} & (1-\lambda)(A_0 + A_1\lambda + \ldots + A_{n-1}\lambda^{n-1}) \\ & + (1-\lambda)A(\lambda^n + \lambda^{n+1} + \ldots + \lambda^{m-1}) \\ & - (1-\lambda)(\alpha_n\lambda^n + \ldots + \alpha_{m-1}\lambda^{m-1}) + A_m\lambda^m + \rho_m, \end{aligned}$$

le deuxième terme du second membre se réduit à

$$A\lambda^n - A\lambda^m = A\lambda^n - (A_m + \alpha_m)\lambda^m;$$

les termes $A_m\lambda^m$ et $-A_m\lambda^m$ se détruisent, et si de A on retranche la valeur obtenue pour S, il vient

$$(2)\quad \left\{ \begin{aligned} A - S = {} & A(1-\lambda^n) - (1-\lambda)(A_0 + A_1\lambda + \ldots + A_{n-1}\lambda^{n-1}) \\ & - (1-\lambda)(\alpha_n\lambda^n + \ldots + \alpha_{m-1}\lambda^{m-1}) + \alpha_m\lambda^m - \rho_m. \end{aligned} \right.$$

Le module de $A - S$ est inférieur à la somme des modules des cinq termes qui forment le second membre de l'équation précédente; cherchons des limites supérieures de ces modules. Soit B le plus grand des modules de A, A_0, A_1, A_2, ...; comme on a

$$1 - \lambda^n = (1-\lambda)(1 + \lambda + \lambda^2 + \ldots + \lambda^{n-1}) < n(1-\lambda),$$

le module du premier terme du second membre de (2) est $< nB(1-\lambda)$; le module du terme suivant est évidemment inférieur à la même limite; ensuite, si β est le plus grand parmi les modules de α_n, α_{n+1}, ..., le module du troisième terme que nous avons à considérer sera inférieur à

$$(1-\lambda)\beta(\lambda^n+\lambda^{n+1}+\ldots+\lambda^{m-1})=\beta\lambda^n-\beta\lambda^m<\beta-\beta\lambda^m;$$

le module du quatrième terme est $<\beta\lambda^m$, et en ajoutant au module du cinquième terme les limites supérieures que nous venons d'obtenir pour les modules des quatre premiers termes, on trouve

$$(3)\qquad \operatorname{mod}(A-S)<2nB(1-\lambda)+\beta+\operatorname{mod}\rho_m.$$

Cela posé, déterminons n de telle sorte que les modules de α_n, α_{n+1}, ..., et par suite β, soient inférieurs a $\frac{1}{4}\varepsilon$, ce qui est possible puisque la série (1) est convergente; on peut aussi déterminer m de telle sorte que $\operatorname{mod}\rho_m<\frac{1}{4}\varepsilon$, quel que soit λ entre 0 et 1; m sera peut-être beaucoup plus grand que n, mais il sera fini, comme ε; enfin prenons λ assez voisin de l'unité pour que $nB(1-\lambda)$ soit $<\frac{1}{4}\varepsilon$. L'inégalité (3) montre que, pour toutes les valeurs de λ qui satisfont à cette condition, le module de $A-S$ sera moindre que ε, ce qui, comme je l'ai dit, démontre en toute rigueur le théorème d'Abel sans que nous ayons eu une seule fois à parler de l'infini.

Pour être nette et élémentaire, la démonstration précédente ne laisse pas que d'offrir une certaine complication, et l'on peut se demander s'il n'est pas possible d'établir en quelques mots soit le théorème d'Abel, soit le théorème plus général dont j'ai parlé. Considérons une série dont tous les termes sont des fonctions continues d'une variable réelle x, et qui est convergente pour toutes les valeurs de x comprises entre X_0 et X inclusivement; on peut croire que, pour toutes ces valeurs, la somme de la série sera une fonction continue de x. En effet, dira-t-on, pour toutes ces valeurs, la série a une somme déterminée qui dépend en général de x. Soient $\mathrm{F}(x)$ cette somme, $\varphi(x)$ la somme des n premiers termes de la série, $\psi(x)$ le reste correspondant; on aura

$$\mathrm{F}(x) = \varphi(x) + \psi(x).$$

On peut prendre n assez grand, quoique fini, pour que $\psi(x)$ soit inférieur à un nombre donné ε, si petit qu'il soit; alors $\varphi(x)$, étant la somme d'un nombre limité de fonctions continues de x, sera lui-même une fonction continue de x, et il en sera de même pour $\mathrm{F}(x)$, puisque $\psi(x)$ est, si l'on veut, négligeable.

Pour prouver l'insuffisance de cette démonstration, il suffit de citer un cas où le théorème censé démontré tombe en défaut. Prenons la série qui a pour terme général

$$u_p = \frac{x^{4p-3}}{4p-3} + \frac{x^{4p-1}}{4p-1} - \frac{x^{2p}}{2p};$$

elle est obtenue en transposant et en groupant les termes du développement bien connu de $\mathrm{L}(1+x)$ suivant les puissances de x par la formule de Maclaurin, et représente la même fonction tant que $\bmod x < 1$; pour $x = 1$, elle devient

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{4n-3} + \frac{1}{4n-1} - \frac{1}{2n} + \ldots.$$

On sait que cette série est convergente et a pour somme $\frac{3}{2}\mathrm{L}2$; ce n'est pas la valeur de $\mathrm{L}(1+x)$ pour $x = 1$, et la série considérée, quoique satisfaisant aux conditions du théorème que je discute, est discontinue pour $x = 1$. Le théorème proposé est donc faux, et le théorème d'Abel, qui en est un cas particulier, ne saurait être presque évident; il faut, au contraire, pour l'établir, examiner les choses de très près.

Ce n'est pas tout de savoir que la démonstration critiquée est illusoire; il faut en trouver le défaut. Considérons deux valeurs de x, a et $a-h$, h étant une très petite quantité; pour que $\psi(a)$ et $\psi(a-h)$ soient inférieurs à un autre nombre très petit ε, il faut prendre pour n une valeur très grande qui dépend de ε, a et h. Quand x varie de $a-h$ à a, chacun des termes de $\varphi(x)$ varie d'une quantité très petite, en général, de l'ordre de h; mais, comme ces termes sont très nombreux, il peut arriver que leur somme $\varphi(x)$ varie d'une quantité finie ou même très grande; $F(a-h)$ ne sera pas très voisine de $F(a)$, et la série sera discontinue dans le voisinage de $x=a$.

Dans l'exemple cité, donnons à x les valeurs 1 et $1-h$; pour de très petites valeurs de h, $(1-h)^p$ est sensiblement égal à e^{-ph}, et la valeur de u_p, en y faisant $x=1-h$, diffère peu de $\frac{1}{2p}(e^{-ph}-e^{-2ph})$; si ph a une valeur finie, u_p est de l'ordre de $\frac{1}{p}\cdot$ Pour que $\psi(1-h)$ soit très petit, il ne faut pas qu'il contienne beaucoup de termes de cette espèce, ce qui exige évidemment que nh soit très grand: on s'assure aisément que dans ce cas $\psi(1)$ est aussi très petit. Cela posé, on peut écrire

$$\begin{aligned}\varphi(1)-\varphi(1-h) = {} & \left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\ldots-\frac{1}{2n}\right)\\ & -\left[\frac{1-h}{1}-\frac{(1-h)^2}{2}+\ldots-\frac{(1-h)^{2n}}{2n}\right]\\ & -\left[\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+3}+\ldots+\frac{1}{4n-1}\right]\\ & -\left[\frac{(1-h)^{2n+1}}{2n+1}+\ldots+\frac{(1-h)^{4n-1}}{4n-1}\right];\end{aligned}$$

la différence des deux premières parties, qui sont des valeurs très approchées de $L2$ et $L(2-h)$, est très petite; la quatrième partie, inférieure à n fois son premier terme, ou sensiblement à $\frac{n}{2n+1}e^{-2nh}$, est très petite, puisque nh est très grand ; reste la troisième partie qui, pour de grandes valeurs de n, diffère peu de $\frac{1}{2}\text{L}\,2$: telle est, à la limite, la différence entre $\varphi(1)$ et $\varphi(1-h)$, ou entre $\text{F}(1)$ et $\text{F}(1-h)$, et qui s'accorde avec un fait bien connu.

Je vais appliquer le théorème d'Abel à la série, ordonnée suivant les puissances positives et entières de z, dans laquelle on peut développer la valeur de θ qui satisfait à l'équation $\cos\theta = \cos\varphi + z$, et qui se réduit à φ pour $z = 0$. Le théorème de Cauchy montre que ce développement est possible quand $\bmod z < 1 - \bmod \cos\varphi$; dans ces conditions, je développe θ par la formule de Maclaurin, et comme $\theta = \text{arc}\cos(\cos\varphi + z)$, en posant $\cos\varphi = x$, tout revient à calculer les dérivées successives de la fonction $\text{arc}\cos x$, que je désigne par t. On a d'abord

$$\frac{dt}{dx} = \frac{-1}{\sqrt{1 \quad x^2}}, \quad \frac{d^2t}{dx^2} = \frac{-x}{(1-x^2)^{\frac{2}{3}}};$$

le moyen qui me semble le plus commode pour avoir la valeur explicite de toutes les dérivées consiste à déduire des deux équations précédentes l'égalité

$$(1-x^2)\frac{d^2t}{dx^2} - x\frac{dt}{dx} = 0.$$

Différentiant n fois par rapport à x, on trouve

$$(4) \qquad (1-x^2)\frac{d^{n+2}t}{dx^{n+2}} - (2n+1)x\frac{d^{n+1}t}{dx^{n+1}} - n^2\frac{d^nt}{dx^n}.$$

Si, dans cette relation, on fait successivement n égal à 1, 2, 3, ..., on pourra calculer de proche en proche les dérivées de t ; on trouvera pour la $n^{\text{ième}}$ dérivée

$$(5) \qquad \frac{d^nt}{dx^n} = \frac{\text{T}_n}{(1-x^2)^{n \quad \frac{1}{2}}},$$

T_n étant un polynôme de degré $n-1$ en x; on verra même aisément que T_n est de la forme

$$(6)\quad T_n = (n-1)!\,x^{n-1} + A_1 x^{n-3} + \ldots + A_\mu x^{n-2\mu-1} + \ldots.$$

En vertu de la formule (5), la relation (4) peut s'écrire

$$\begin{aligned}(1-x^2)\frac{d^2}{dx^2}\left[T_n(1-x^2)^{\frac{1}{2}-n}\right]\\ -(2n-1)x\frac{d}{dx}\left[T_n(1-x^2)^{\frac{1}{2}-n}\right] - n^2 T_n(1-x^2)^{\frac{1}{2}-n} = 0;\end{aligned}$$

effectuant et réduisant, on voit que T_n satisfait à l'équation différentielle

$$(1-x^2)\frac{d^2 T_n}{dx^2} - (2n-3)x\frac{dT_n}{dx} - (n-1)^2 T_n = 0.$$

Cette équation, devant être identiquement vérifiée par le polynôme (6) qui représente T_n, permet de déterminer $A_1, A_2, \ldots$; à l'aide d'un calcul connu, on trouve

$$A_\mu = \frac{(n-1)(n-2)\ldots(n-2\mu)}{(2\times 4\times 6\ldots 2\mu)^2}(n-1)!,$$

et l'on a tout ce qu'il faut pour développer θ suivant la série de Maclaurin

$$\left\{\begin{aligned}\theta = \varphi - \frac{z}{\sin\varphi} - \cos\varphi\frac{z^2}{2\sin^3\varphi} - \left(\cos^2\varphi + \frac{1}{2}\right)\frac{z^3}{3\sin^5\varphi} - \ldots\\ - \left[\cos^{n-1}\varphi + \frac{(n-1)(n-2)}{2^2}\cos^{n-3}\varphi\right.\\ \left. + \frac{(n-1)\ldots(n-4)}{2^2 4^2}\cos^{n-5}\varphi + \ldots\right]\frac{z^n}{n\sin^{2n+1}\varphi} - \ldots\end{aligned}\right.$$

Quand on donne à z une des valeurs limites indiquées par le théorème de Cauchy, par exemple $1-\cos\varphi$, en supposant φ compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$, on ne peut savoir *a priori* si la série (7) sera convergente; mais, dans le cas que je considère, le terme général de la série devient, en faisant toujours $x = \cos\varphi$,

$$u_p = \frac{(1-\cos\varphi)^p}{p!}\,\frac{d^p t}{dx^p};$$

en vertu de cette formule, je puis, dans l'équation (4), remplacer les dérivées de t par les u correspondants, ce qui donne

$$\begin{aligned}(n+1)(n+2)(1+\cos\varphi)u_{n+2}&\\ -(n+1)(2n+1)u_{n+1}\cos\varphi - n^2 u_n(1-\cos\varphi) &= 0,\end{aligned}$$

d'où

$$(1+\cos\varphi)\frac{u_{n+2}}{u_{n+1}}\,\frac{u_{n+1}}{u_n} - \frac{2n+1}{n+2}\cos\varphi\,\frac{u_{n+1}}{u_n} - \frac{n^2(1-\cos\varphi)}{(n+1)(n+2)} = 0.$$

Cette relation montre sans difficulté que, pour n infini, $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$; on ne peut encore décider si la série considérée est convergente; on pose $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{a}{n}$, on désigne par α la limite de a pour n infini, et si dans la dernière relation on néglige les termes très petits par rapport à $\frac{1}{n}$, il reste

$$\begin{aligned}(1+\cos\varphi)\left(1-\frac{2\alpha}{n}\right)&\\ -\left(2-\frac{3}{n}-\frac{2\alpha}{n}\right)\cos\varphi - \left(1-\frac{3}{n}\right)(1-\cos\varphi) &= 0.\end{aligned}$$

Après des réductions considérables, cette relation donne simplement $\alpha = \frac{3}{2}$, ce qui, comme on sait, indique la convergence de la série; celle-ci représente, d'après le théorème d'Abel, ce que devient θ pour $z = 1 - \cos\varphi$, c'est-à-dire zéro. L'identité obtenue donne, après quelques réductions faciles,

$$\varphi \cot \frac{1}{2}\varphi = 1 + \frac{\cos\varphi}{4\cos^2\frac{1}{2}\varphi} + \ldots$$
$$+ \left[\cos^{n-1}\varphi + \frac{(n-1)(n-2)}{2^2}\cos^{n-3}\varphi + \ldots\right]$$
$$\times \frac{1}{n\,2^{n-1}\cos^{2n-2}\frac{1}{2}\varphi} + \ldots;$$

pour $\varphi = \frac{\pi}{2}$, on trouve une formule connue :

$$\frac{\pi}{2} = 1 + \frac{1}{2.3} + \frac{1.3}{2.4.5} + \frac{1.3.5}{2.4.6.7} + \ldots.$$

Mais je ne m'étendrai pas davantage sur ces divers résultats.