NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

N. GOFFART

Évaluation géométrique de l'intégrale $\int_{-1}^{1} \frac{\sin\alpha dx}{1-2x\cos\alpha+x^2} = f(\alpha)$

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 4 (1885), p. 171-172

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1885_3_4__171_0>

ÉVALUATION GÉOMÉTRIQUE DE L'INTÉGRALE

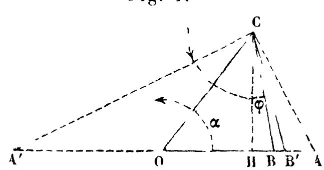
$$\int_{-1}^{1} \frac{\sin\alpha\, dx}{1 - 2x\cos\alpha + x^2} = f(\alpha);$$

PAR M. N. GOFFART.

La forme du dénominateur conduit naturellement à considérer un triangle OBC, dans lequel

$$OC = 1, \quad OB = x, \quad BOC = \alpha,$$

Fig. 1.



et où, en conséquence,

$$CB^2 = 1 - 2x\cos\alpha + x^2.$$

Soit pris $BB' = dx$, et abaissons la perpendiculaire CH; faisons

$$HCB = \varphi,$$

il vient

$$d\varphi = BCB'.$$

En outre,

$$CH = \sin\alpha = BC\sin B,$$

$$BB' = \sin d\varphi\,\frac{BC}{\sin B'} = d\varphi\,\frac{BC}{\sin B} = d\varphi\,\frac{BC^2}{CH}.$$

La différentielle sous le signe $\int$ est donc

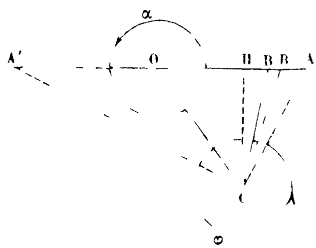
$$\frac{\sin\alpha\, dx}{1 - 2x\cos\alpha + x^2} = \frac{CH.BB'}{CB^2} = d\varphi = BCB$$

L'intégrale devant être prise relativement à x de -1 à $+1$, soit $OA = OA' = OC$; il en résulte que l'intégrale cherchée est la somme des éléments angulaires BCB' compris entre CA' et CA : c'est donc l'angle droit

$$A'CA = \frac{\pi}{2}.$$

La seconde figure montre que, l'angle α étant compris entre π et 2π, les accroissements $d\varphi$ sont négatifs;

Fig. 2.



l'angle BCB' est engendré dans le sens opposé à celui de la première figure, en sorte que l'intégrale est, dans ce cas, $-\frac{\pi}{2}$.

Généralement donc on a

$$f(\alpha) = \frac{\pi}{2} \quad \text{pour} \quad 2n\pi < \alpha < (2n+1)\pi,$$

$$f(\alpha) = -\frac{\pi}{2} \quad \text{pour} \quad (2n-1)\pi < \alpha < 2n\pi;$$

d'où l'on conclut que la fonction $f(\alpha)$ est périodique.