

N. GOFFART

Évaluation géométrique de l'intégrale

$$\int_{-1}^1 \frac{\sin \alpha dx}{1-2x \cos \alpha + x^2} = f(\alpha)$$

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 4 (1885), p. 171-172

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1885_3_4__171_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1885, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

ÉVALUATION GÉOMÉTRIQUE DE L'INTÉGRALE

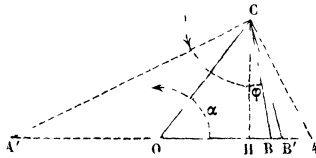
$$\int_{-1}^1 \frac{\sin x \, dx}{1 - 2x \cos x + x^2} = f(x);$$

PAR M. N. GOFFART.

La forme du dénominateur conduit naturellement à considérer un triangle OBC, dans lequel

$$OC = 1, \quad OB = x, \quad \angle BOC = \alpha,$$

Fig. 1.



et où, en conséquence,

$$CB^2 = 1 - 2x \cos \alpha + x^2.$$

Soit pris $BB' = dx$, et abaissons la perpendiculaire CH; faisons

$$\angle HCB = \varphi,$$

il vient

$$d\varphi = \angle CBB'.$$

En outre,

$$CH = \sin \alpha = BC \sin B,$$

$$BB' = \sin d\varphi \frac{BC}{\sin B'} = d\varphi \frac{BC}{\sin B} = d\varphi \frac{BC^2}{CH}.$$

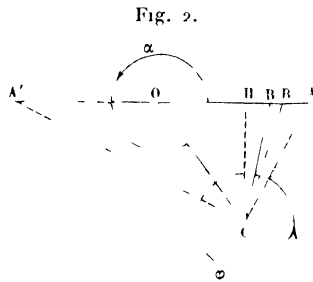
La différentielle sous le signe \int est donc

$$\frac{\sin x \, dx}{1 - 2x \cos x + x^2} = \frac{CH \cdot BB'}{CB^2} = d\varphi = \angle CBB'$$

L'intégrale devant être prise relativement à x de -1 à $+1$, soit $OA = OA' = OC$; il en résulte que l'intégrale cherchée est la somme des éléments angulaires BCB' compris entre CA' et CA : c'est donc l'angle droit

$$A'CA = \frac{\pi}{2}.$$

La seconde figure montre que, l'angle α étant compris entre π et 2π , les accroissements $d\varphi$ sont négatifs;



l'angle BCB' est engendré dans le sens opposé à celui de la première figure, en sorte que l'intégrale est, dans ce cas, $-\frac{\pi}{2}$.

Généralement donc on a

$$f(\alpha) = \frac{\pi}{2} \quad \text{pour} \quad 2n\pi < \alpha < (2n+1)\pi,$$

$$f(\alpha) = -\frac{\pi}{2} \quad \text{pour} \quad (2n-1)\pi < \alpha < 2n\pi;$$

d'où l'on conclut que la fonction $f(\alpha)$ est périodique.

—