NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

L. MIRMAN

Sur les fonctions homogènes de deux polynomes U et V, premiers entre eux et de même degré en x

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 4 (1885), p. 173-176

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1885_3_4__173_0>

SUR LES FONCTIONS HOMOGÈNES DE DEUX POLYNOMES U ET V, PREMIERS ENTRE EUX ET DE MÊME DEGRÉ EN x;

PAR M. L. MIRMAN,
Élève du lycée Saint-Louis.

Soient deux polynômes U *et* V *premiers entre eux, et de degré m, et soit une fonction homogène et entière de* U *et* V

$$F(U,V) = U^p + A_1 U^{p-1} V + \ldots + A_{p-1} U V^{p-1} + A_p V^p;$$

les racines communes aux équations $UV' - VU' = 0$ (U', V' *étant les dérivées de* U *et* V) *et* $F(U,V) = 0$ *sont racines multiples de cette dernière.*

Réciproquement, si la fonction homogène $F(U,V)$ *n'a pas en* U *et* V *de facteur multiple* $(aU + bV)^k$, *les racines multiples de l'équation* $F(U,V) = 0$ *sont racines de* $UV' - VU' = 0$.

En effet, la dérivée peut s'écrire

$$F' = pU^{p-1}U' + \ldots - A_k[(p-k)U^{p-k-1}U'V^k + kU^{p-k}V^{k-1}V'] + \ldots + pA_pV^{p-1}V'.$$

Soit α une racine commune à $F = 0$ et à $UV' - VU' = 0$. Soient u, v, u', v' les valeurs des polynômes correspondants pour cette valeur particulière de la variable; u et v sont différents de zéro, car, si u était nul, l'équation $F = 0$ montre que v devrait l'être aussi, ce qui est impossible, puisque U et V sont premiers entre eux.

On peut donc écrire

$$\frac{u'}{u} = \frac{v'}{v} = t.$$

Remplaçons u' et v' par leurs valeurs dans la dérivée F'; nous aurons

$$F' = l_p u^p + \ldots + A_k[(p-k)\, l u^{p-k} v^k + k l u^{p-k} v^k] + \ldots + p l v^p$$

ou

$$F' = lp F,$$

et, comme $F = 0$, on a aussi $F' = 0$; donc cette racine α annule la dérivée F': c'est donc une racine multiple de F.

Réciproquement, soit α une racine multiple de F; je dis que, pour cette valeur, on a

$$\frac{u'}{u} = \frac{v'}{v}.$$

Posons

$$\frac{u'}{u} = l, \quad \frac{v'}{v} = l + h;$$

je vais démontrer que h est nul.

En effet, en remplaçant, dans F', u' et v' par ces valeurs, on aura

$$\begin{aligned} lpu^p &+ A_1[(p-1)\, l u^{p-1} v + (l+h)\, u^{p-1} v] + \ldots \\ &+ A_k[(p-k)\, l u^{p-k} v^k + k(l+h)\, u^{p-k} v^k] + \ldots + (l+h) p v^p = 0, \end{aligned}$$

ou

$$lp F + h(A_1 u^{p-1} v + 2A_2 u^{p-2} v^2 + \ldots + k A_k u^{p-k} v^k + \ldots + p A_p v^p) = 0.$$

Comme F est nul, il suffit de démontrer que la quantité entre parenthèses est différente de zéro; il suffit donc de faire voir que ce polynôme entier en x,

$$\Phi = A_1 U^{p-1} V + \ldots + k A_k U^{p-k} V^k + \ldots + p A_p V^p,$$

ne peut avoir de racine commune avec le polynôme F.

En effet, posons

$$\frac{U}{V} = \rho;$$

nous pouvons écrire

$$F = V^p(\rho^p + A_1\rho^{p-1} + \ldots + A_k\rho^{p-k} + \ldots + A_p),$$
$$\Phi = V^p(A_1\rho^{p-1} + 2A_2\rho^{p-2} + \ldots + kA_k\rho^{p-k} + \ldots + pA_p).$$

Or, supposons que F et Φ, ou ce qui revient au même, puisque V ne peut être nul dans ces conditions, que les quantités entre crochets s'annulent toutes deux pour $x = \alpha$, c'est-à-dire pour $\rho = \beta$. Désignons ces polynômes entiers en ρ par $f(\rho)$ et $\varphi(\rho)$. On vérifiera facilement que l'on a identiquement

$$pf(\rho) = \rho f'(\rho) + \varphi(\rho);$$

donc cette valeur $\rho = \beta$ annulerait $f'(\rho)$ [1] et serait racine multiple de $f(\rho)$. Si donc nous supposons que $f(\rho)$ n'a pas en ρ de racine multiple, c'est-à-dire que $F(U, V)$ n'admet pas de facteur de forme $(aU + bV)^k$, F et Φ ne peuvent avoir en x de racine commune; donc $h = 0$, et la racine multiple considérée α annule

$$UV' - VU' = 0. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Corollaire. — L'expression $UV' - VU'$, où U et V sont des polynômes de degré m, est de degré $2m - 2$; donc, si la fonction homogène $F(U, V)$ satisfait à la condition énoncée, l'équation $F(U, V) = 0$, de degré p en U et V, de degré mp en x, ne peut avoir en x plus de $2(m-1)$ racines doubles, quel que soit p.

Autre corollaire. — L'expression

$$\frac{UV' - VU'}{\sqrt{F(U, V)}}$$

[les coefficients de U et V étant tels que F ait $2(m-1)$

(1) A moins que $\beta = 0$, mais alors A_p serait nul, et l'on mettrait u en facteur dans le coefficient de h.

racines doubles] peut s'écrire

$$\frac{1}{M\sqrt{f(x)}},$$

M étant une constante, et $f(x)$ un polynôme entier en x de degré

$$mp - 4m - 4 \quad \text{ou} \quad m(p-4)+4.$$

Cette proposition est une généralisation d'un théorème de Jacobi qu'on peut énoncer de la façon suivante :

Si l'on considère l'expression

$$\frac{UV' - VU'}{\sqrt{AU^4 + BUV^3 + CU^2V^2 - DUV^3 + EV^4}},$$

et qu'on détermine les coefficients de U *et* V, *de façon que le polynôme sous le radical ait toutes ses racines doubles, sauf quatre, l'expression peut s'écrire*

$$\frac{1}{M\sqrt{x^4 - \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta}}.$$

Cas particuliers :

1° Toute racine double de $aU + bV = 0$ est racine de $UV' - VU' = 0$.

2° Toute racine double de $aU^2 + 2bUV + cV^2 = 0$ est racine de $UV' - VU' = 0$ si $b^2 - ac$ est $\neq 0$.