NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

CH. BIEHLER

# Sur la construction des courbes dont l'équation est donnée en coordonnées polaires (fin)

*Nouvelles annales de mathématiques 3e série*, tome 4 (1885), p. 249-256

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1885_3_4__249_0>

# SUR LA CONSTRUCTION DES COURBES DONT L'ÉQUATION EST DONNÉE EN COORDONNÉES POLAIRES

[FIN (1)];

PAR M. CH. BIEHLER.

## III.

### BRANCHES PARABOLIQUES DANS LES COURBES DONT L'ÉQUATION EST DONNÉE EN COORDONNÉES POLAIRES.

1. Soit toujours

$$\rho^m \varphi_m(\omega) + \rho^{m-1}\varphi_{m-1}(\omega) + \ldots + \rho\varphi_1(\omega) + \varphi(\omega) = 0$$

l'équation de la courbe Nous avons vu que, quand $\alpha$ est une racine simple de l'équation $\varphi_m(\omega) = 0$, la racine $\rho_1$, qui augmente indéfiniment quand $\omega$ tend vers $\alpha$, donne naissance à une branche de courbe hyperbolique.

Nous allons supposer actuellement que $\alpha$ est racine double de l'équation $\varphi_m(\omega) = 0$, c'est-à-dire

$$\varphi_m(\alpha) = 0, \quad \varphi'_m(\alpha) = 0;$$

nous supposerons en outre que $\alpha$ n'annule pas $\varphi_{m-1}(\omega)$.

Dans ce cas, la racine $\rho_1$, qui augmente indéfiniment, nous donne l'équation

$$\rho_1 + S_1 = -\frac{\varphi_{m-1}(\alpha+\varepsilon)}{\frac{\varepsilon^2}{1.2}\varphi''_m(\alpha) + \frac{\varepsilon^3}{1.2.3}\varphi'''_m(\alpha) + \ldots};$$

$S_1$ étant une quantité finie, d'après nos hypothèses, $\rho_1$ aura le signe de

$$-\frac{\varphi_{m-1}(\alpha)}{\varphi''_m(\alpha)};$$

(1) *Nouvelles Annales de Mathématiques,* 3e série, t. IV, p. 223.

de plus, en désignant par $\lambda_1$ la fonction $\rho_1 \sin\varepsilon$, il vient

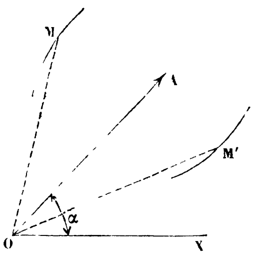
$$\lambda_1 = -\left[ S_1 \varepsilon^2 + \frac{\varphi_{m-1}(\alpha) + \ldots}{\frac{1}{1.2}\varphi''_m(\alpha) + \frac{\varepsilon}{1.2.3}\varphi'''_m(\alpha) + \ldots} \right] \frac{\sin\varepsilon}{\varepsilon^2}.$$

On voit par cette formule que $\lambda_1$ augmente indéfiniment quand $\varepsilon$ tend vers zéro et que le signe de $\lambda_1$ est celui de

$$-\frac{\varphi_{m-1}(\alpha)}{\varphi''_m(\alpha)}\varepsilon.$$

Le signe de $\lambda_1$ change donc avec $\varepsilon$. En se reportant à la signification géométrique de $\lambda_1$, on voit que la racine $\rho_1$ engendre une branche de courbe qui s'éloigne indéfiniment du rayon polaire OA mené sous l'angle $\alpha$ quand $\varepsilon$ tend vers zéro. Le signe $-\frac{\varphi_{m-1}(\alpha)}{\varphi''_m(\alpha)}$ donne d'ailleurs la disposition des branches de courbe par rapport au rayon OA. Si $-\frac{\varphi_{m-1}(\alpha)}{\varphi''_m(\alpha)}$ est positif, la courbe présente la disposition de la *fig.* 1; car à une valeur po-

Fig. 1.




sitive de $\varepsilon$ correspond une valeur positive de $\lambda$ et à une valeur négative de $\varepsilon$ une valeur négative de $\lambda$.

2. Supposons maintenant

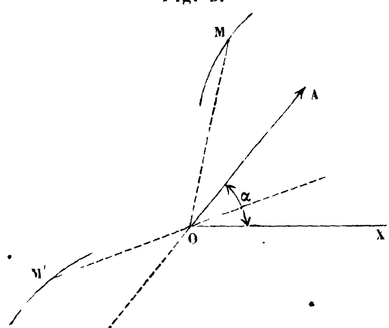
$$\varphi_m(\alpha) = 0, \quad \varphi'_m(\alpha) = 0, \quad \ldots, \quad \varphi_m^{(p-1)}(\alpha) = 0,$$
$$\varphi_m^{(p)}(\alpha) \gtrless 0, \quad \varphi_{m-1}(\alpha) \gtrless 0.$$

On verra, comme dans le cas précédent, que la racine, qui augmente indéfiniment quand $\varepsilon$ tend vers zéro, engendre une branche parabolique dont la forme générale est celle de la *fig.* 1 quand $p$ est un nombre pair. Mais, si $p$ est impair, $\lambda_1$ ayant une expression dont le signe est donné par

$$-\frac{\varphi_{m-1}(\alpha)}{\varphi_m^{(p)}(\alpha)}\,\varepsilon^{p-1},$$

on voit que $\lambda_1$ ne change pas de signe avec $\varepsilon$; on ob-

Fig. 2.




tient alors une disposition de la courbe analogue à celle de la *fig.* 2.

3. Considérons actuellement le cas où

$$\varphi_m(\alpha)=0,\quad \varphi'_m(\alpha)=0,\quad \varphi''_m(\alpha)=0,\quad \varphi_{m-1}(\alpha)=0,$$
$$\varphi'''_m(\alpha)\gtrless 0,\quad \varphi'_{m-1}(\alpha)\gtrless 0.$$

Deux racines $\rho_1$ et $\rho_2$ de l'équation de la courbe tendront vers l'infini et l'on aura des expressions de la forme

$$\rho_1+\rho_2=\frac{A+A'\varepsilon}{\varepsilon^2},$$

$$\rho_1\rho_2=\frac{B+B'\varepsilon}{\varepsilon^3},$$

pour les fonctions $\rho_1+\rho_2$ et $\rho_1\rho_2$.

En désignant, comme nous l'avons fait dans la théorie des asymptotes, par $\lambda_1$ et $\lambda_2$ les quantités $\rho_1 \sin\varepsilon$, $\rho_2 \sin\varepsilon$, il viendra

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \frac{\sin\varepsilon}{\varepsilon}\,\frac{A + A'\varepsilon}{\varepsilon},$$

$$\lambda_1 \lambda_2 = \frac{\sin^2\varepsilon}{\varepsilon^2}\,\frac{B + B'\varepsilon}{\varepsilon}.$$

On voit que la somme et le produit des quantités $\lambda_1\,\lambda_2$ augmentent indéfiniment; mais, si l'on divise membre à membre ces égalités, on obtiendra

$$\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} = \frac{\varepsilon}{\sin\varepsilon}\,\frac{A + A'\varepsilon}{B + B'\varepsilon};$$

par suite, quand $\varepsilon$ tendra vers zéro, la somme $\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2}$ tend vers la quantité finie $\frac{A}{B}$; il en résulte que l'une des quantités $\lambda$ augmente indéfiniment et que l'autre tend vers une limite finie $\frac{B}{A}$.

L'une des racines, $\rho_1$ par exemple, augmente donc indéfiniment en engendrant une branche parabolique, et l'autre $\rho_2$ engendrera une branche hyperbolique dont l'asymptote correspondante a pour équation

$$\rho \sin(\omega - \alpha) = \frac{B}{A}.$$

La branche parabolique se construit aisément, car on a

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \frac{A + A'\varepsilon}{\varepsilon}\,\frac{\sin\varepsilon}{\varepsilon},$$

et, comme $\lambda_2$ a pour limite $l_2 = +\frac{B}{A}$, $\lambda_2$ aura le signe de $\frac{A}{\varepsilon}$; la disposition de la courbe est donc analogue à celle de la *fig.* 1.

Quant à la branche hyperbolique, il suffit, pour la construire, de connaître le signe de la différence

$$\lambda_2 - \frac{B}{A} = \lambda''.$$

Or on tire évidemment des formules précédentes

$$\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} = \frac{\varepsilon}{\sin\varepsilon}\,\frac{A + A'\varepsilon}{B + B'\varepsilon},$$

$$\frac{1}{\lambda_1\lambda_2} = \frac{\varepsilon^3}{\sin^2\varepsilon}\,\frac{1}{B + B'\varepsilon},$$

et, par suite,

$$\left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2}\right)^2 = \frac{\varepsilon^2}{\sin^2\varepsilon}\left(\frac{A + A'\varepsilon}{B + B'\varepsilon}\right)^2 - \frac{4\varepsilon^3}{\sin^2\varepsilon}\,\frac{1}{B + B'\varepsilon},$$

d'où

$$\frac{1}{\lambda_2} = \frac{\varepsilon}{\sin\varepsilon}\,\frac{A + A'\varepsilon}{B + B'\varepsilon} - \frac{\varepsilon^2}{\sin\varepsilon}\,\frac{1}{A + A'\varepsilon} + \ldots.$$

Si $A'_1$ et $B'_1$ sont les parties indépendantes de $\varepsilon$ dans $A'$ et $B'$, la différence $\frac{1}{\lambda_2} - \frac{A}{B}$ a pour premier terme

$$\left[\frac{BA'_1 - AB'_1}{B^2} - \frac{1}{A}\right]\varepsilon;$$

le signe du coefficient de $\varepsilon$ donne la position de la courbe par rapport à son asymptote.

4. Passons au cas où l'on aurait

$$\varphi_m(\alpha) = 0, \quad \varphi'_m(\alpha) = 0, \quad \varphi_m(\alpha) = 0,$$

avec

$$\varphi_{m-1}(\alpha) = 0, \quad \varphi'_{m-1}(\alpha) = 0,$$

$$\varphi'''_m(\alpha) \gtrless 0, \quad \varphi''_{m-1}(\alpha) \gtrless 0, \quad \varphi_{m-2}(\alpha) < 0$$

Deux racines tendent encore vers l'infini, et pour ce cas on a les deux formules

$$\rho_1 - \rho_2 = \frac{A + A'\varepsilon}{\varepsilon},$$

$$\rho_1\rho_2 = \frac{B + B'\varepsilon}{\varepsilon^3},$$

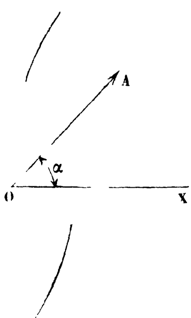
par suite

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \frac{\sin \varepsilon}{\varepsilon}(A + A'\varepsilon),$$

$$\lambda_1 \lambda_2 = \frac{\sin^2 \varepsilon}{\varepsilon^2}\left(\frac{B + B'\varepsilon}{\varepsilon}\right).$$

$\lambda_1 + \lambda_2$ reste fini, mais le produit $\lambda_1 \times \lambda_2$ augmente indéfiniment, et il est du signe de $\frac{B}{\varepsilon}$; on en conclut que $\lambda_1$ et $\lambda_2$ augmentent indéfiniment et sont de signe contraire.

Fig. 3.




Pour avoir la position de la courbe, il suffit de former l'expression de $(\lambda_1 - \lambda_2)^2$. Or on a

$$(\lambda_1 - \lambda_2)^2 = \left[\frac{(A + A'\varepsilon)^2\varepsilon - 4(B + B'\varepsilon)}{\varepsilon}\right]\frac{\sin^2\varepsilon}{\varepsilon^2};$$

par conséquent $(\lambda_1 - \lambda_2)^2$ n'est positif que quand $-\frac{4B}{\varepsilon}$ est positif, c'est-à-dire quand $\varepsilon$ est de signe contraire à B.

La *fig.* 3 a été construite dans l'hypothèse de B négatif.

5. Supposons maintenant

$$\varphi_m(\alpha) = 0, \quad \varphi'_m(\alpha) = 0, \quad \varphi''_m(\alpha) = 0, \quad \varphi'''_m(\alpha) = 0$$

avec

$$\varphi_{m-1}(\alpha) = 0, \quad \varphi'_{m-1}(\alpha) = 0$$

et

$$\varphi_m^{\text{IV}}(\alpha) < 0, \quad \varphi''_{m-1}(\alpha) \gtrless 0, \quad \varphi_{m-2}(\alpha) \gtrless 0.$$

Les racines qui tendent vers zéro nous donnent les relations

$$\rho_1 + \rho_2 = \frac{A + A'\varepsilon}{\varepsilon^2},$$

$$\rho_1 \rho_2 = \frac{B + B'\varepsilon}{\varepsilon^4};$$

la somme $\rho_1 + \rho_2$ est infinie ainsi que $\rho_1 \times \rho_2$, quand $\varepsilon$ s'annule; on a de plus

$$(\rho_1 - \rho_2)^2 = \frac{A^2 - 4B + C\varepsilon}{\varepsilon^4}.$$

Les racines ne sont donc réelles que si $A^2 - 4B > 0$.

Supposons cette condition remplie, on voit que les quantités $\lambda_1$ et $\lambda_2$ augmentent toutes deux indéfiniment.

On a, en outre,

$$(\lambda_1 - \lambda_2)^2 = \frac{A^2 - 4B + C\varepsilon}{\varepsilon^2}; \quad \frac{\sin^2\varepsilon}{\varepsilon^2}.$$

$\lambda_1$ et $\lambda_2$ sont donc réels, quel que soit le signe de $\varepsilon$; le produit $\lambda_1 \times \lambda_2$ est du signe de B, quel que soit le signe de $\varepsilon$; le signe des quantités $\lambda_1$ et $\lambda_2$ dépend de celui de $A \sin\varepsilon$.

Fig. 4.

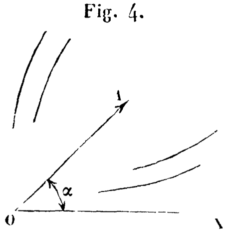
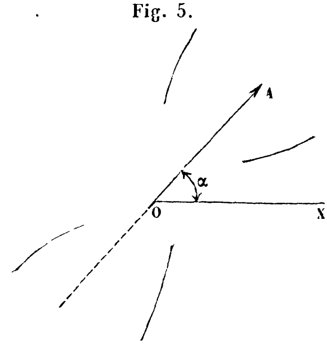



Fig. 5.




Si $B > 0$, on a une disposition analogue à celle de la *fig.* 4.

Si $B < 0$, on obtient la *fig.* 5; la *fig.* 4 a été construite dans l'hypothèse de $A > 0$.

6. Si $A^2 - 4B < 0$ le point à l'infini est imaginaire.

Si $A^2 - 4B = 0$, et si l'on pose

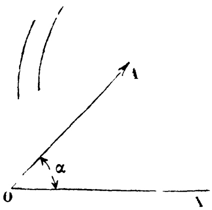
$$C = C_1 + C'_1 \varepsilon,$$

$(\lambda_1 - \lambda_2)^2$ prend la forme

$$(\lambda_1 - \lambda_2)^2 = \frac{\sin^2 \varepsilon}{\varepsilon^2} \frac{C_1 + C'_1 \varepsilon}{\varepsilon};$$

$\lambda_1$ et $\lambda_2$ ne sont donc réels qu'autant que $C_1$ et $\varepsilon$ sont

Fig. 6.



de même signe; mais B est, dans ce cas, essentiellement positif, puisque $A^2 = 4B$; par suite, les deux racines $\rho_1$, $\rho_2$ sont de même signe, ainsi que $\lambda_1$ et $\lambda_2$.

On obtient alors une disposition analogue à celle de la *fig.* 6 qui correspond au rebroussement de seconde espèce.