NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

J.-E. ESTIENNE

Quelques réflexions sur l'étude géométrique des courbes géométriques et théorèmes pouvant y être utiles (suite)

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 4 (1885), p. 297-315

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1885_3_4__297_0>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1885, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques

http://www.numdam.org/

QUELQUES RÉFLEXIONS SUR L'ETUDE GÉOMETRIQUE DES COURBES GÉOMÉTRIQUES ET THÉOREMES POUVANT Y ÊTRE UTILES

(SUITE);

PAR M. J.-E. ESTIENNE.

RELATION ENTRE HUIT PLANS SEPTAIRES.

Une simple transformation par polaires réciproques conduit au théorème suivant, analogue à celui de Brianchon :

THÉORÈME. — *Si les huit faces d'un octogone gauche sont septaires (c'est-à-dire telles que toute quadrique tangente à sept le soit à la huitième), les quatre droites qui joignent les sommets opposés sont les génératrices d'un hyperboloïde.*

DE LA CUBIQUE GAUCHE.

Une courbe très utile dans l'étude des quadriques est la cubique gauche. On se contentera d'en rappeler brièvement les propriétés et l'on s'attachera à faire ressortir ses analogies étroites avec la conique plane.

DÉFINITION. — *La cubique gauche, ou courbe gauche du troisième ordre, est telle qu'un plan quelconque la coupe en trois points.*

Cette définition donne une première analogie entre la cubique gauche et la conique, analogie intime, quoique d'apparence puérile :

La cubique gauche est coupée par un plan en un nombre de points égal à celui qui détermine un plan.

De même, la conique est coupée par une droite, en un nombre de points égal à celui qui détermine une droite.

De la définition de la cubique gauche, on déduit successivement et sans peine les théorèmes suivants :

1° *La perspective d'une cubique gauche, quand on prend le point de vue sur cette courbe, est une conique.*

2° *Une cubique gauche est l'intersection de deux cônes du second ordre qui ont une génératrice commune, ou, plus généralement, de deux quadriques qui ont une génératrice commune.*

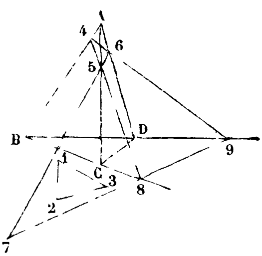
3° *Six points quelconques de l'espace déterminent une cubique gauche et une seule.*

Ce qui précède permet de trouver la relation double qui existe entre sept points d'une cubique gauche.

On va la rappeler et la démontrer :

Théorème. — *Un plan quelconque coupe les faces d'un tétraèdre* ABCD, *inscrit dans une cubique gauche,*

Fig. 8.



suivant le quadrilatère 4.5.7.9, *et la cubique en trois points* 1.2.3; *le quadrilatère* 4.5.7.9 *et le triangle* 1.2.3 *sont circonscrits à une même conique* (*fig.* 8).

En effet, de A, on voit les points B.C.D., 1.2.3., sur une conique; les triangles 4.5.6 et 1.2.3 sont donc inscrits dans une conique, et, d'après un théorème connu, leurs côtés sont aussi tangents à une conique. Une perspective faite de B montre de même que les triangles 4.8.9 et 1.2.3 sont circonscrits à une conique. Le théorème résulte dès lors de ce que les droites 4.8 et 4.9 sont respectivement les mêmes que les droites 4.5 et 4.6.

On peut considérer la cubique gauche à un autre point de vue, en remarquant que huit quelconques de ses points sont septaires, puisque toute quadrique qui coupe une cubique gauche en sept points contient cette cubique tout entière.

Si donc sept points sont sur une cubique gauche, on a la relation qui les lie, en exprimant que leur huitième point septaire est mal déterminé.

C'est ainsi que la construction faite (*fig.* 7) pour trouver le huitième point septaire ne donnerait pas un point unique si les points α, α'; β, β'; γ, γ' étaient tels qu'on pût faire passer par ces points les côtés de deux et, par suite, d'une infinité d'hexagones définis comme on l'a dit. L'heptagone A.B.C.D.E.F.G. serait alors inscrit à une cubique gauche.

On va donner entre sept points d'une cubique gauche une autre relation, analogue à une de celles qu'on peut établir entre six points d'une conique.

Le théorème plan est le suivant :

Théorème. — *Les polaires de tous les points d'une conique, par rapport aux côtés d'un triangle inscrit à cette conique, passent par un même point.*

Ce théorème se démontre facilement par projection, ou analytiquement comme il suit :

L'équation, en coordonnées trilatères d'une conique circonscrite au triangle, est

$$\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 0.$$

Elle exprime que la polaire $\frac{X}{x} + \frac{Y}{y} + \frac{Z}{z} = 0$ d'un point x, y, z de cette conique passe constamment par le point qui a pour coordonnées a, b, c.

THÉORÈME CORRESPONDANT SUR LA CUBIQUE GAUCHE. — *Les plans polaires de tous les points d'une cubique gauche, par rapport aux faces d'un tétraèdre* A.B.C.D. *inscrit, passent par une droite fixe.*

D'après ce qu'on a vu, une cubique gauche passant par les points A, B, C, D est l'intersection de deux cônes ayant leurs sommets en A et B, par exemple, et passant par les quatre points.

ABCD étant le tétraèdre de référence, on a donc, pour les équations de cette courbe,

$$\frac{b}{y} + \frac{c}{z} + \frac{d}{v} = 0$$

et

$$\frac{a'}{x} + \frac{c'}{z} + \frac{d'}{v} = 0$$

Elles expriment que le plan polaire

$$\frac{X}{x} + \frac{Y}{y} + \frac{Z}{z} + \frac{V}{v} = 0$$

du point ayant pour coordonnées x, y, z, v, passe constamment par la droite joignant les points ayant pour coordonnées : 0, b, c, d et a', 0, c', d'.

On pourrait prendre pour base de la théorie des cubiques gauches la féconde relation de Bobillier entre huit plans septaires.

Ce géomètre a démontré que, si huit plans sont septaires, on peut déterminer les coefficients λ_i, de telle sorte que, $P_i = 0$ étant l'équation de l'un des plans, on ait l'identité

$$\sum_{i=1}^{i=8} \lambda_i P_i^2 = 0.$$

En faisant de cette identité deux membres contenant chacun quatre termes, on a le remarquable théorème suivant :

Théorème. — *Si les huit faces de deux tétraèdres sont septaires, ces deux tétraèdres sont autopolaires par rapport à une même quadrique; de plus, on voit, en prenant cette quadrique comme quadrique de transformation par polaires réciproques, que les huit sommets des deux tétraèdres sont aussi septaires.*

On reviendra, à propos d'une autre question, sur le théorème correspondant de la théorie des coniques.

Il résulte du théorème précédent que le huitième point septaire des sept points A, B, C, D, 1, 2, 3 s'obtient en prenant le pôle du plan 1, 2, 3 par rapport à la quadrique, à laquelle le tétraèdre A, B, C, D et le triangle 1, 2, 3 sont respectivement autopolaires.

ABCD étant le tétraèdre de référence, et α_i, β_i, γ_i, δ_i les coordonnées d'un des sommets du triangle 1, 2, 3, l'équation de cette conique est

$$\begin{vmatrix} x^2 & y^2 & z^2 & v^2 \\ \alpha_1\alpha_2 & \beta_1\beta_2 & \gamma_1\gamma_2 & \delta_1\delta_2 \\ \alpha_2\alpha_3 & \beta_2\beta_3 & \gamma_2\gamma_3 & \delta_2\delta_3 \\ \alpha_3\alpha_1 & \beta_3\beta_1 & \gamma_3\gamma_1 & \delta_3\delta_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Pour que le tétraèdre et le triangle soient inscrits à une cubique gauche, il faut que le pôle du plan du triangle 1.2.3, par rapport à cette conique, soit mal déterminé, ce qui exige que la quadrique soit mal déterminée.

On verrait sans peine que cette condition se réduit à ce que deux déterminants mineurs soient nuls; par exemple

$$\begin{vmatrix} \alpha_1\alpha_2 & \beta_1\beta_2 & \gamma_1\gamma_2 \\ \alpha_2\alpha_3 & \beta_2\beta_3 & \gamma_2\gamma_3 \\ \alpha_3\alpha_1 & \beta_3\beta_1 & \gamma_3\gamma_1 \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{vmatrix} \alpha_1\alpha_2 & \beta_1\beta_2 & \delta_1\delta_2 \\ \alpha_2\alpha_3 & \beta_2\beta_3 & \delta_2\delta_3 \\ \alpha_3\alpha_1 & \beta_3\beta_1 & \delta_3\delta_1 \end{vmatrix}.$$

On peut écrire cette double condition par les deux équations

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{\alpha_1} & \frac{1}{\beta_1} & \frac{1}{\gamma_1} \\ \frac{1}{\alpha_2} & \frac{1}{\beta_2} & \frac{1}{\gamma_2} \\ \frac{1}{\alpha_3} & \frac{1}{\beta_3} & \frac{1}{\gamma_3} \end{vmatrix} = 0 \quad \text{et} \quad \begin{vmatrix} \frac{1}{\alpha_1} & \frac{1}{\beta_1} & \frac{1}{\delta_1} \\ \frac{1}{\alpha_2} & \frac{1}{\beta_2} & \frac{1}{\delta_2} \\ \frac{1}{\alpha_3} & \frac{1}{\beta_3} & \frac{1}{\delta_3} \end{vmatrix} = 0.$$

Elles expriment que les plans polaires des points 1, 2 et 3, par rapport au tétraèdre ABCD, plans ayant pour équations

$$\frac{x}{\alpha_1} + \frac{y}{\beta_1} + \frac{z}{\gamma_1} + \frac{v}{\delta_1} = 0,$$
$$\frac{x}{\alpha_2} + \frac{y}{\beta_2} + \frac{z}{\gamma_2} + \frac{v}{\delta_2} = 0,$$
$$\frac{x}{\alpha_3} + \frac{y}{\beta_3} + \frac{z}{\gamma_3} + \frac{v}{\delta_3} = 0,$$

passent, comme on le savait déjà, par une même droite.

Autre analogie entre la cubique gauche et la conique.

La courbe du second ordre est aussi de seconde classe, et ce fait ne se reproduit pas pour la courbe générale d'un ordre supérieur à 2.

De même, la courbe gauche du troisième ordre, ou cubique gauche, est de troisième classe, en convenant que la classe d'une courbe gauche est marquée par le nombre des plans osculateurs qu'on peut lui mener par un point de l'espace.

Cette proposition résulte immédiatement du théorème qu'on va démontrer :

Théorème. — *La surface développable, formée par les tangentes à une cubique gauche, est du quatrième ordre et de la troisième classe.*

L'ordre étant marqué par le nombre des points d'intersection d'une droite quelconque D avec la surface, nous allons chercher ce nombre ou, ce qui revient au même, le nombre des plans tangents à la cubique qu'on peut mener par la droite D.

Projetons parallèlement à la droite D la courbe gauche sur un plan quelconque. La projection est une cubique plane ayant un point double.

Les plans tangents à la cubique gauche menés par D coupent le plan de projection suivant les tangentes menées à la cubique plane, par le point d où D coupe le plan de projection. Or la cubique plane, ayant un point double, est de quatrième classe, et les tangentes menées par d, par suite les plans tangents menés par D sont au nombre de quatre; la première partie du théorème est démontrée.

On en déduit immédiatement :

Corollaire.— *Les traces des tangentes à une cubique gauche sur un plan osculateur à cette courbe sont une conique. Cette conique est aussi l'enveloppe des traces des plans osculateurs à la cubique.*

La seconde partie du théorème est dès lors facile à démontrer; car, si dans le plan osculateur à une cubique gauche on prend un point quelconque A, on pourra par ce point mener à la courbe deux nouveaux plans osculateurs seulement, dont les traces sur le premier seront les tangentes menées de A à la conique du corollaire précédent.

On termine ici l'étude des cubiques gauches; on se contentera d'ajouter les remarques suivantes :

1° *Une cubique gauche et une droite qui la coupe en deux points sont à l'intersection de deux quadriques.*

Par suite, si l'on donne sept points, leur huitième point septaire est sur la droite qui est menée par l'un d'eux et coupe en deux points la cubique gauche déterminée par les six autres.

2° *Par une cubique gauche et deux points quelconques de l'espace on peut faire passer en général une et une seule quadrique.*

Il résulte de là que, si neuf points sont sur la courbe gauche du quatrième ordre, intersection de deux quadriques, la cubique gauche déterminée par six d'entre eux coupe le plan des trois autres en trois points, ces six points sont sur une conique.

Digression sur la condition simple du premier ordre, la plus générale, a laquelle on peut astreindre une conique.

Nous dirons qu'on astreint une conique à une condition simple du premier ordre, quand on donne entre les six coefficients de son équation en coordonnées cartésiennes ou trilatères une relation homogène du premier degré par rapport aux coefficients.

C'est ainsi qu'on astreint une conique à une condition simple du premier ordre, quand on lui impose de passer par un point, ou encore, d'être conjuguée par rapport à deux points.

On se propose de trouver la forme générale de la relation géométrique à laquelle correspond cette condition analytique.

On peut poser le problème d'une façon un peu différente, mais plus nette, en disant :

Trouver la condition géométrique à laquelle satisfont toutes les coniques C, *dont l'équation est*

$$C = \lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 + \lambda_3 C_3 + \lambda_4 C_4 + \lambda_5 C_5,$$

C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 *étant les équations de coniques quelconques et* $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5$ *des coefficients quelconques.*

La solution de cette question et de celles du même genre est fort utile dans l'application de l'analyse à la Géométrie. La difficulté qu'on rencontre à étudier la Géométrie au moyen de l'Algèbre consiste souvent, en effet, moins à poser les équations et à les combiner, qu'à interpréter géométriquement le résultat analytique trouvé. On a fait, pour ainsi dire, une version de la langue géométrique en langue analytique, pour poser les équations primitives du problème : il faut faire un thème pour donner un sens géométrique aux équations finales ; le thème est souvent plus difficile que la version.

C'est ainsi, par exemple, que de la relation, si facile à écrire, entre les coordonnées de dix points d'une quadrique, on n'a pas encore pu déduire leur relation de position.

Il est très utile de pouvoir conclure immédiatement de ce fait analytique que l'équation d'une courbe ne contient qu'un seul paramètre variable au premier degré, le fait géométrique qu'elle passe par un certain nombre de points fixes.

Il serait à désirer qu'on eût aussi la solution dans le cas où l'équation contient un nombre quelconque de paramètres au premier degré. C'est, comme on l'a dit, cette question qu'on va traiter, pour les seules coniques malheureusement.

La voie qui mène à la solution est un peu détournée.

Considérons dans l'espace cinq points quelconques et un plan. Toutes les quadriques passant par ces cinq points coupent le plan suivant une conique. Cette conique n'est évidemment pas quelconque; elle satisfait à la condition simple, du premier ordre, la plus générale.

Car, l'équation générale des quadriques passant par ces cinq points contient quatre paramètres arbitraires au premier degré; la conique d'intersection du plan fixe donné avec cette quadrique renferme encore dans son équation ces quatre paramètres au premier degré, et ils y sont distincts.

Le problème revient donc à trouver la condition pour qu'une conique et cinq points quelconques soient sur une quadrique.

Lemme. — *Si cinq points quelconques de l'espace, et une conique sont sur une quadrique, on peut trouver sur cette conique une infinité de systèmes de trois points qui, avec les cinq points de l'espace forment un système septaire.*

En effet, si par les cinq points et un point quelconque A de la conique on fait passer une cubique gauche, cette cubique coupe le plan de la conique en deux nouveaux points ; la droite qui les joint coupe la conique en deux points B et C, qui avec le point A et les cinq points de l'espace forment un système septaire, puisqu'ils sont à l'intersection de la quadrique donnée et de la quadratique (intersection de deux quadriques) constituée par la cubique gauche et la droite BC.

Théorème. — *Si un pentagone gauche et un triangle ont pour sommets huit points septaires, le triangle est autopolaire par rapport à une conique déterminée, quand on connaît le pentagone et le plan du triangle.*

Si, en effet, on se reporte au théorème déduit plus haut de la relation de Bobillier, on voit que cette conique est l'intersection du plan donné avec la quadrique définie comme il suit : Le tétraèdre ayant pour sommets quatre des sommets du pentagone gauche lui est autopolaire ; de plus, le cinquième sommet de ce pentagone admet par rapport à elle, pour plan polaire, le plan donné.

On peut déduire de là une définition plane de cette conique, et dire avec P. Serret : Cette conique a pour polaires de chacun des sommets du pentagone plan, intersection du plan donné avec le pentagone gauche, les côtés opposés de ce même pentagone.

Mais ce qui nous importe, c'est que cette conique est définie quand on donne le plan et le pentagone gauche.

De ce théorème et du lemme on déduit immédiatement la proposition suivante :

Théorème. — *Si une conique située dans un plan donné est sur une quadrique passant par cinq points donnés dans l'espace, on peut inscrire à cette conique une infinité de triangles autopolaires par rapport à une conique déterminée par les données.*

De ce théorème on conclut la solution du problème proposé :

Théorème. — *La condition simple du premier ordre la plus générale à laquelle on puisse astreindre une conique est de lui imposer d'être telle qu'on puisse lui inscrire une infinité de triangles autopolaires par rapport à une conique donnée.*

Cette condition paraît au premier abord n'être pas simple; elle l'est cependant, puisqu'elle n'est qu'une transformation d'une condition simple. Le théorème suivant ne laisse d'ailleurs aucun doute à cet égard.

Théorème. — *Si deux coniques sont telles qu'on puisse inscrire à l'une un triangle antopolaire par rapport à l'autre, on peut en inscrire une infinité, satisfaisant à la même condition.*

Cette proposition peut se déduire, comme le célèbre théorème de Poncelet, dont elle est l'analogue, de l'identité de Bobillier, qui exprime que six droites D_1, $D_2, \ldots, D_6$ sont tangentes à une conique :

$$\lambda_1 D_1^2 + \lambda_2 D_2^2 + \lambda_3 D_3^2 = \lambda_4 D_4^2 + \lambda_5 D_5^2 + \lambda_6 D_6^2$$

Cette identité exprime que, si deux triangles sont circonscrits à une conique, ils sont autopolaires par rapport à une seconde conique, et aussi (par transformation par polaires réciproques) inscrits à une troisième conique.

On retiendra seulement, pour la démonstration du théorème énoncé, que si deux triangles sont inscrits à une conique, ils sont autopolaires par rapport à une autre conique.

Cela étant, soient deux coniques φ et φ_1 et ABC un triangle inscrit dans la conique φ et autopolaire par rapport à la conique φ_1. Prenons par rapport à la conique φ_1 la polaire d'un point quelconque D de la conique φ; soient E et F les points où cette polaire coupe la conique φ; les deux triangles ABC et DEF sont inscrits à la conique φ; ils sont donc autopolaires à une même conique qui n'est autre que la conique φ_1, définie par les conditions suffisantes, qu'elle soit autopolaire par rapport au triangle ABC et qu'elle admette la droite EF, comme polaire du point D.

La démonstration analytique de ce théorème conduit à un calcul intéressant qui donne l'équation homogène et du premier degré par rapport aux coefficients de l'équation de la conique φ, qui exprime que les coniques φ et φ_1 sont dans la dépendance indiquée dans l'énoncé.

Si la conique φ se réduisait à un système de deux droites, il est évident que ces deux droites seraient conjuguées par rapport à la conique φ_1.

On peut, à l'aide de cette remarque, démontrer les élégants théorèmes de P. Serret sur les quadriques et les quadratiques.

Quelques théorèmes sur les quadriques ayant leurs analogues dans la théorie des coniques, et pouvant servir a la recherche de la relation entre dix points d'une quadrique.

Théorème. — *Dix points étant sur une quadrique, si par six d'entre eux on fait passer une quadrique (a), et par les quatre autres une quadrique (b) passant par l'intersection de (a) avec un plan fixe quelconque, le plan de l'autre conique commune aux quadriques (a) et (b) passe par un point fixe quand (a) varie.*

Prenons les quatre points du second groupe pour sommets du tétraèdre de référence; soient P, P_1, P_2, P_3 les équations de quatre surfaces du second ordre passant par les six autres points; l'équation générale des quadriques passant par ces six points est

$$\lambda P + \mu P_1 + \nu P_2 + \rho P_3 = 0.$$

Le déterminant suivant, égal à o, exprime qu'on peut déterminer les coefficients λ, μ, ν, ρ de telle sorte que la quadrique passe par les sommets du tétraèdre de référence

$$\begin{vmatrix} Px^2 & P_1x^2 & P_2x^2 & P_3x^2 \\ Py^2 & P_1y^2 & P_2y^2 & P_3y^2 \\ Pz^2 & P_1z^2 & P_2z^2 & P_3z^2 \\ Pv^2 & P_1v^2 & P_2v^2 & P_3v^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Dans ce déterminant, P_ix^2 est le coefficient de x^2 dans l'équation $P_i = 0$.

Si

$$P_i = A_ix^2 + A'_iy^2 + A''_iz^2 + A'''_iv^2 + \ldots,$$

le déterminant devient

$$\begin{vmatrix} A & A' & A'' & A''' \\ A_1 & A'_1 & A''_1 & A'''_1 \\ A_2 & A'_2 & A''_2 & A'''_2 \\ A_3 & A'_3 & A''_3 & A'''_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Cette relation exprime que les dix points donnés sont sur une conique.

Soit $P_i = 0$ l'équation de la quadrique (a) de l'énoncé; cherchons l'équation de la quadrique (b) correspondante.

Soient

$$px + qy + rz + sv = 0$$

l'équation du plan fixe donné et

$$\alpha_ix + \beta_iy + \gamma_iz + \delta_iv = 0$$

l'équation du plan variable de la seconde conique d'intersection des surfaces (a) et (b).

L'équation générale des quadriques passant par l'intersection de (a) avec chacun de ces plans est

$$\begin{aligned} &A_i x^2 + A'_i y^2 + A''_i z^2 + A'''_i v^2 + \ldots \\ &\quad + (px + qy + vz + sv)(\alpha_i x + \beta_i y + \gamma_i z + \delta_i r) = 0; \end{aligned}$$

pour que cette quadrique soit la quadrique (b), il faut qu'elle passe par les sommets du tétraèdre de référence, c'est-à-dire que les coefficients α_i, β_i, γ_i, δ_i soient déterminés comme il suit :

$$A_i = p\alpha_i, \quad A'_i = q\beta_i, \quad A''_i = r\gamma_i, \quad A'''_i = s\delta_i.$$

En remplaçant $A_i, A''_i, \ldots$ par ces valeurs dans le déterminant écrit plus haut, et divisant par $pqrs$, on a un déterminant nul, qui exprime que les plans

$$\alpha_i x + \beta_i y + \gamma_i z + \delta_i v = 0$$

passent par un point fixe.

Corollaires. — En prenant pour les quadriques P_i quatre systèmes de deux plans passant par les six points et pour plan fixe le plan de l'infini, on a la proposition suivante :

Si les six sommets d'un octaèdre et les quatre sommets d'un tétraèdre sont sur une quadrique, les quatre paraboloïdes hyperboliques circonscrits au tétraèdre et ayant respectivement pour plans directeurs les faces opposées de l'octaèdre coupent ces plans directeurs en deux droites d'un même plan ; ces quatre plans passent par un même point.

En gardant le plan de l'infini pour plan fixe et laissant aux quadriques P_i toute la généralité qu'elles comportent, on a cette autre proposition :

Si un hexagone gauche et un tétraèdre sont inscrits *à une même quadrique, les plans d'intersection de deux quadriques homothétiques, dont l'une est circonscrite à l'hexagone et l'autre au tétraèdre, passent par un même point.*

Ce théorème a pour analogue dans le plan le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Deux triangles étant inscrits à une conique, si l'on circonscrit à l'un une conique* C *et à l'autre une conique* C_1 *et que ces coniques* C *et* C_1 *se coupent en deux points sur une droite fixe, la droite qui joint leurs deux autres points d'intersection passe par un point fixe.*

On démontrerait, comme le précédent, cet autre théorème :

THÉORÈME. — *Sept points de l'espace et trois points d'un plan* P *étant sur une quadrique, si l'on mène par les sept points une quadrique et par les trois points du plan* P *une conique, qui se coupent en deux points sur une droite fixe, la droite qui joint leurs deux autres points d'intersection passe par un point fixe.*

On peut retenir de ce théorème cette importante conclusion :

On considère les trois coniques C_1, C_2, C_3 d'intersection de trois quadriques avec un plan P; si les huit points d'intersection de ces trois quadriques (ils sont septaires) et trois points A, B et C du plan P sont sur une même quadrique, il existe entre les coniques C_1, C_2, C_3 et le triangle ABC une relation de position. Par suite, trois quadriques quelconques passant par les coniques C_1, C_2 et C_3 se coupent en huit nouveaux points septaires qui sont sur une quadrique passant par les points A, B. C.

Ce théorème est à ce point de vue l'analogue du théorème plan de Desargues, qui consiste essentiellement en ceci :

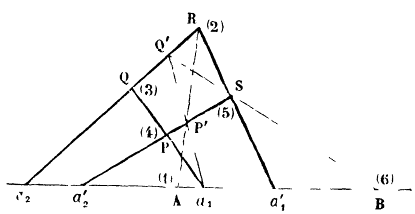
On considère les points d'intersection de deux coniques C_1 et C_2, avec une droite D; soient a_1 et a'_1, a_2 et a'_2 ces points.

Si les quatre points d'intersection des coniques C_1 et C_2 et deux points A et B de la droite D sont sur une même conique, il existe entre les points A, B, a_1, a'_1, a_2, a'_2 une relation de position. On en conclut, sans avoir besoin de connaître cette relation, que deux coniques quelconques passant l'une par les points a_1 et a'_1, l'autre par les points a_2 et a'_2, se coupent en quatre points qui sont sur une conique passant par A et B.

On peut déduire de là le théorème de Pascal, ou plus exactement une démonstration synthétique du théorème de Pascal, qui suppose la connaissance préalable de son énoncé.

Soit en effet PQRS un quadrilatère dont les côtés opposés constituent les coniques C_1 et C_2 (*fig.* 9). (Ces

Fig. 9.



notations et les hypothèses sont indiquées plus haut.) D'après ce qu'on vient de dire, les points R, S et les points P', Q', où une droite passant par a_1 coupe les droites PS et QR, sont situés sur une conique passant par A et B.

Or, si l'on prend pour le point Q', le point d'intersetion de la droite QR avec la droite BS, il y a trois de ces six points, qu'on vient de voir être sur une conique, qui sont en ligne droite; ce sont les points B, S et Q'. Les trois autres points A, R et P' sont donc aussi en ligne droite. Si dès lors on appelle 1 le point A, 2 le point R, 3 le point Q, 4 le point P, 5 le point S et 6 le point B, on voit que les côtés opposés de l'hexagone 1.2.3.4.5.6 inscrit à une conique se coupent en trois points P', Q', a'_1 en ligne droite.

Ce n'est pas pour sa valeur intrinsèque qu'on a donné cette démonstration; c'est pour indiquer le parti qu'on peut tirer, dans la recherche de la relation entre dix points d'une quadrique, des théorèmes qui précèdent. Ce n'est vraisemblablement pas par analyse qu'on arrivera à cette relation symétrique inconnue; c'est plutôt par une supposition habile, faite *a priori* sur sa forme. Les théorèmes précédents pourront alors être employés avec fruit pour vérifier l'exactitude de cette supposition.

On va donner un dernier théorème assez intéressant par ses applications à la quadratique.

On sait que le plan polaire d'un point P de l'espace par rapport à toutes les quadriques qu'on peut mener par sept points donnés passe par un même point. Si l'on ne donnait que six points, le plan polaire serait en général complètement indéterminé, sauf dans le cas particulier suivant :

THÉORÈME. — *Les plans polaires d'un point* O *pris sur l'intersection de deux plans* X *et* Y *par rapport à toutes les quadriques passant par six points fixes situés dans ces deux plans passent par un point fixe.*

Si, en effet, on prend ces deux plans pour plans des x et des y et un troisième plan passant par O pour plan des z, et que $P = 0, Q = 0, R = 0$ soient les équations de trois quadriques passant par les six points donnés, l'équation générale des quadriques qui passent par ces six points est

$$\lambda P + \mu Q + \nu R + XY = 0.$$

Le plan polaire de l'origine a pour équation

$$\lambda P'_t + \mu Q'_t + \nu R' = 0$$

(P'_t est la dérivée du polynôme P rendu homogène par l'introduction de la lettre t).

Cette equation ne contenant que deux paramètres arbitraires, le théorème est démontré.

Si donc on donne, dans chacune des faces X, Y, Z d'un trièdre dont O est le sommet, trois points, on peut construire, au moyen de trois de ses points, le plan polaire du point O par rapport à la quadrique déterminée par les neuf points donnés.

Si les neuf points donnés sont sur une quadratique, ce plan polaire est mal déterminé; par suite, les trois points qui le déterminent dans le cas general sont en ligne droite.

On pourrait peut-être, de cette forme de la relation double qui lie neuf points d'une quadrique, passer à une relation plus simple et plus élégante, à la relation pascalienne.

On voit, en résumé, que dans la seconde Partie de ce Mémoire on n'a résolu qu'une seule des trois questions qui en sont l'objet principal. De plus longs développements, qu'un résultat précis ne couronnerait pas, seraient oiseux.

Je me suis appliqué à citer les auteurs à qui j'ai fait des emprunts. Si j'ai énoncé comme miennes des propositions déjà connues, je prie qu'on impute cela à mon peu d'érudition, et je mets ma loyauté à la disposition de toute réclamation fondée.