E. CESÀRO

Sur un théorème de M. Laguerre

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 4 (1885), p. 321-327

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1885_3_4__321_1>

SUR UN THÉORÈME DE M. LAGUERRE;

PAR M. E. CESARO.

I. Il s'agit de la *Question* 1389 (3^e série, t. I, p. 141), dont nous croyons devoir modifier légèrement l'énoncé, en démontrant que :

Si l'équation $f(z) = 0$, *de degré* n, *n'admet que des racines réelles et simples,*

1° *L'équation* $f^2(z) + k^2 f'^2(z) = 0$, *où* k *est réel, a toutes ses racines imaginaires ;*

2° *Dans chacune de ces racines, la valeur absolue du coefficient de* i *ne surpasse pas la valeur absolue de* kn.

II. 1° Puisque les racines $a_1, a_2, \ldots, a_n$ de $f(z) = 0$ sont simples, il est clair que l'équation

$$f^2(z) + k^2 f'^2(z) = 0$$

n'a pas de racines en commun avec $f(z)=0$, et, par suite, elle peut être mise sous la forme

$$\frac{f'(z)}{f(z)}=\sum_{1}^{n}\frac{1}{z-a_\nu}=\pm\frac{i}{k}.$$

Remplaçons z par $x+iy$, et, après réduction des deux membres à la forme normale, égalons entre eux les coefficients de i. Il vient

$$y\sum_{1}^{n}\frac{1}{(x-a_\nu)^2+y^2}=\pm\frac{1}{k}.$$

La somme qui figure dans le premier membre est une quantité essentiellement positive. Elle est finie; car, en vertu des hypothèses, il n'est pas possible d'avoir simultanément $x=a_\nu$, $y=0$. Cela posé, le second membre étant différent de zéro, *y ne peut être nul,* résultat évident *a priori*.

III. 2° Soient Y, K les valeurs absolues de y, k. On doit avoir

$$\frac{1}{KY}=\sum_{1}^{n}\frac{1}{(x-a_\nu)^2+Y^2}\leqq\frac{n}{Y^2};$$

d'où

$$Y\leqq Kn.$$

IV. *Remarques.* — 1° On voit sans peine qu'il faut prendre le signe d'inégalité ou celui d'égalité, suivant que n est supérieur ou égal à l'unité.

2° Il est nécessaire que les racines de $f(z)=0$ soient simples. Il est aisé de voir comment se modifie l'énoncé du théorème, dans le cas de racines multiples.

3° Si l'on trace, à la distance Kn de l'axe des x, les deux parallèles à cet axe, tous les zéros de la fonction $f^2(z)+k^2f'^2(z)$ sont compris entre ces droites, mais aucun d'eux n'est situé sur l'axe des x. Tel est, en résumé, le théorème de M. Laguerre.

4° Ce théorème est susceptible de généralisation, soit au point de vue des conditions qu'il exige, soit aussi dans la nature des fonctions auxquelles il est applicable. C'est ce que nous montrerons, sous peu, dans nos *Fondamenti per la Teorica delle funzioni olomorfe, di genere qualunque.*

V. Cependant, tout en restant dans le domaine des fonctions algébriques, nous exposerons dès maintenant un essai d'extension fort naturel. Soient $c_1, c_2, \ldots, c_n$ les zéros de $f(z)$, supposés simples, mais distribués arbitrairement dans le plan. Nous voulons savoir comment sont situés les zéros de $f(z) + \mathrm{M}f'(z)$, où M est l'affixe d'un point quelconque. A cet effet, cherchons les racines de l'équation

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_1^n \frac{1}{z - c_\nu} = -\frac{1}{\mathrm{M}} = -\frac{\mathrm{A} - i\mathrm{B}}{\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2}.$$

Si l'on pose

$$z = x + iy, \quad c_\nu = a_\nu + ib_\nu, \quad \delta_\nu^2 = (a_\nu - x)^2 + (b_\nu - y)^2,$$

la dernière équation se dédouble en

$$\sum_1^n \frac{a_\nu - x}{\delta_\nu^2} = \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2}, \quad \sum_1^n \frac{b_\nu - y}{\delta_\nu^2} = \frac{\mathrm{B}}{\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2}.$$

Considérons un zéro Q de l'équation proposée. En chaque zéro de $f(z)$ déposons une masse, inversement égale au carré de la distance à Q. Soit G le centre de gravité de ce système, et appelons ξ, η ses coordonnées. Les relations obtenues en dernier lieu deviennent

$$\frac{\xi - x}{\mathrm{A}} = \frac{\eta - y}{\mathrm{B}} = \frac{1}{(\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2)\mu},$$

μ étant la masse résultante. Conséquemment, *les droites* QG, OM *sont parallèles*. En outre,

$$QG.OM = \frac{1}{\mu}.$$

D'après cela, le point G est complètement déterminé. On voit qu'*il ne coïncide jamais avec* Q, et qu'*il est d'autant plus près de ce dernier point que* μ *est plus grand.*

VI. Supposons que les zéros de $f(z)$ soient alignés sur une droite Δ, de sorte que l'on ait, pour toute valeur de ν,

$$\beta_\nu \cos\varphi - \alpha_\nu \sin\varphi = h.$$

Par combinaison linéaire des équations obtenues dans le paragraphe précédent, on trouve

$$(y\cos\varphi - x\sin\varphi - h)\sum_1^n \frac{1}{\delta_\nu^2} = -\frac{B\cos\varphi - A\sin\varphi}{A^2 + B^2}.$$

Menons, par l'origine, la parallèle D à Δ. Si ϖ, p sont les distances respectives des points Q, M aux droites Δ, D, la dernière équation montre que, en considérant ces distances comme positives lorsqu'elles sont dirigées en sens inverse, on a

$$\varpi\mu = \frac{p}{A^2 + B^2},$$

et, par conséquent, ϖ et p ont même signe. En d'autres termes,

1° *Suivant que* M *est ou n'est pas situé dans la partie du plan limitée par* D *et contenant* Δ, *les zéros de l'équation proposée sont ou ne sont pas situés dans la partie du plan limitée par* Δ *et contenant* D ;

2° *Si* M *est sur* D, *les zéros de la même équation sont nécessairement alignés sur* Δ.

VII. Considérons, pour un instant, ce dernier cas. La condition de parallélisme des droites OM, Δ donne

$$\frac{a_\nu - x}{A} = \frac{b_\nu - y}{B} = \pm \frac{\delta_\nu}{\sqrt{A^2 + B^2}},$$

et, par suite, les deux égalités de l'avant-dernier paragraphe deviennent

$$\sum_1^n \frac{1}{\delta_\nu} = \pm \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Prenons, sur Δ, une origine, à partir de laquelle on compte les distances $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ des zéros de $f(z)$, et la distance λ d'un point variable. L'équation précédente peut s'écrire ainsi

$$\sum_1^n \frac{1}{\lambda_\nu - \lambda} = \text{const.}$$

Il est évident que, lorsque λ varie depuis une des quantités λ_ν jusqu'à la quantité immédiatement supérieure, le premier membre varie de $-\infty$ à $+\infty$, en croissant constamment, car sa dérivée par rapport à λ est positive. Il prend donc une fois, et une seule fois, la valeur constante du second membre. On peut, en conséquence, énoncer ce théorème :

Si les zéros de $f(z)$ sont situés sur une droite Δ, il en est de même des zéros de $f(z) + \mathrm{M} f'(z)$, pourvu que le point M *se trouve sur la parallèle à Δ, passant par l'origine. Les zéros des deux fonctions s'alternent, sur Δ, de manière que, entre deux zéros consécutifs de l'une des fonctions, il existe toujours un zéro de l'autre fonction, et il n'en existe qu'un.*

VIII. Plus généralement, il est facile de démontrer que :

Si les zéros de $f(z)$ sont situés sur une droite Δ, celle-ci contient aussi les zéros de $\mathrm{N}f(z)+\mathrm{M}f'(z)$, pourvu que l'angle des droites OM, ON *égale l'inclinaison de Δ sur l'axe des x. Les zéros des deux fonctions se succèdent sur Δ, suivant la loi de Rolle.*

On obtient, comme cas très particulier, le *théorème de Rolle,* en supposant $\mathrm{N}=0$, $\mathrm{M}=1$, $\Delta \equiv \mathrm{O}x$.

IX. *Remarques.* — 1° Revenons au cas de $\mathrm{N}=1$, et M arbitrairement situé dans le plan. D'après ce qui a été vu plus haut, le centre de gravité d'un système de masses, appliquées aux zéros de $f(z)$, et variant en raison inverse du carré de la distance à un zéro Q de $f(z)+\mathrm{M}f'(z)$, se trouve à l'intersection de Δ avec la parallèle à OM, passant par Q. Dans le cas particulier, considéré par M. Laguerre, ce centre de gravité n'est autre que la projection de Q sur l'axe des x.

2° Tout ce qui a été dit précédemment est applicable aux fonctions holomorphes, du genre zéro, douées d'un coefficient exponentiel de la forme e^{mz}, m étant quelconque. Moyennant quelques modifications, les mêmes théorèmes peuvent être transportés aux fonctions holomorphes d'un genre quelconque.

X. Nous allons maintenant généraliser la seconde partie du théorème de M. Laguerre, en cherchant une limite supérieure de ϖ. Observons, à cet effet, que, à cause de $\delta_\nu \geqq \varpi$, on a

$$\frac{p}{(\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2)\varpi} = \mu = \sum_1^n \frac{1}{\delta_\nu^2} \leqq \frac{n}{\varpi^2},$$

d'où

$$\varpi \leqq n \frac{A^2 + B^2}{p}.$$

XI. On peut répéter les mêmes considérations pour la fonction $f(z) - Mf'(z)$. En les réunissant aux précédentes, on a cette généralisation du théorème de M. Laguerre :

1° *Si les zéros de $f(z)$ sont situés sur une droite Δ, les zéros de $f^2(z) - M^2 f'^2(z)$ sont ou ne sont pas situés sur la même droite, suivant que le point* M *se trouve ou ne se trouve pas sur la parallèle à Δ, menée par l'origine.*

2° *Dans le dernier cas, les zéros de la seconde fonction sont situés, de part et d'autre de Δ, entre les deux parallèles à cette droite, menées à une distance n fois plus grande que la distance de* M *au point d'intersection des perpendiculaires aux droites* OM, Δ, *passant respectivement par* O, M.

XII. En particulier, si les droites OM, Δ sont perpendiculaires entre elles, on a $A^2 + B^2 = p^2$, et, par suite, $\varpi \leqq np$. Conséquemment :

Si $f(z)$ a ses zéros alignés sur une droite Δ, et si M *est l'affixe d'un point, situé sur la perpendiculaire à Δ, passant par l'origine, les zéros de $f^2(z) - M^2 f'^2(z)$ ne sont pas situés sur Δ, mais leurs distances à cette droite ne peuvent être plus grandes que n fois la distance de* M *à l'origine.*

Plus particulièrement encore, si l'on fait coïncider Δ avec l'axe des x, on retrouve le théorème de M. Laguerre.