NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

A. DE SAINT-GERMAIN

Note sur la discontinuité de certaines séries

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 4 (1885), p. 331-334

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1885_3_4__331_0>

NOTE SUR LA DISCONTINUITÉ DE CERTAINES SÉRIES;

PAR M. A. DE SAINT-GERMAIN.

Dans mon Étude sur le théorème d'Abel, publiée en avril 1885 par les *Nouvelles Annales*, j'ai discuté une démonstration d'où il résulterait qu'une série, dont les termes sont fonctions continues de x, varie elle-même nécessairement d'une manière continue avec x, tant qu'elle est convergente. Soient $\varphi(x)$ la somme des n premiers termes, $\psi(x)$ le reste; tant que la série est convergente, sa somme est une fonction déterminée de x,

$$(1)\qquad F(x) = \varphi(x) - \psi(x)$$

Or, dit-on, prenons n assez grand, quoique fini, pour que $\psi(x)$ reste, en valeur absolue, moindre qu'un nombre donné ε, aussi petit qu'on veut; $\varphi(x)$, somme d'un nombre fini de fonctions continues de x, est elle-même fonction continue de x, ainsi que F, puisque ψ est négligeable. J'ai dit pourquoi ce raisonnement ne me semble pas concluant. M. Catalan m'adresse à ce sujet les observations suivantes, auxquelles l'autorité du savant Géomètre donne un intérêt incontestable.

« Vous dites, m'écrit M. Catalan, que de l'égalité (1) on ne peut tirer

$$(2)\qquad F(b) = \varphi(b) + \psi(b),$$

b étant la valeur extrême de x. Pourquoi? Contestez-vous que la limite de la somme de deux quantités soit égale à la somme des limites de celles-ci?

» Lorsque de l'égalité (1) on déduit l'égalité (2), il *est bien entendu que $\varphi(x)$ varie d'une manière continue de $x < b$, à $x = b$ si, pour $x = b$; $\varphi(x)$ est discontinu, il n'y a plus ni démonstration, ni théorème.* C'est ce qui arrive pour la série choisie par vous

$$F(x) = \sum \left(\frac{x^{4n-3}}{4n-3} + \frac{x^{4n-1}}{4n-1} - \frac{x^{2n}}{2n} \right),$$

où, pour $x < 1$, S_n est égal à $L(1+x) - \varepsilon$, et, pour $x = 1$, à $\frac{3}{2} L(1+x) - \varepsilon'$; vous avez donc appliqué mon (?) théorème à un cas formellement exclu; et, trouvant un résultat inadmissible, vous concluez que le théorème est faux. Est-ce bien raisonné? »

Comme on ne peut guère différer d'avis sur la vérité d'une proposition de Mathématiques, lorsqu'on s'est bien entendu sur les termes dans lesquels elle est formulée, je vais essayer de bien préciser ce que j'ai voulu dire. Assurément, si, pour une valeur quelconque de n, $\varphi(x)$ est une fonction continue de x, comme le demande M. Catalan, $F(x)$ aura nécessairement pour limite $F(b)$ quand x tend vers b. Mais. dans l'énoncé de la proposition que je discutais, je supposais seulement que les termes de $F(x)$ fussent des fonctions continues de x, et je disais précisément que cela n'empêche pas $\varphi(x)$ de présenter cette discontinuité que M. Catalan exclut, et qui entraîne la discontinuité de $F(x)$. Et encore réclamerai-je contre l'épithète de *discontinue* que mon savant maître applique à $\varphi(x)$ dans la série (3) ou dans les séries analogues; tant que n reste fini, $\varphi(x)$ ne présente pas de discontinuité, dans le sens strict du mot. Pour la série (3), $\varphi(x)$ est une fonction entière de degré $4n-1$, c'est-à-dire essentiellement continue: quand x tend vers 1, $\varphi(x)$ varie d'autant plus rapidement que n est plus grand, mais sans discontinuité; quand x est très voisin de 1, par exemple égal à $1 - \frac{1}{n}$, $F(x)$ est bien égal à $L(1+x)$, mais $\varphi(x)$ n'en est plus une valeur approchée. En somme, $\varphi(x)$ ne présente pas de caractère de discontinuité avertissant que la série (3) sera discontinue. Ne peut-on craindre que pareil fait ne se présente pour la série d'Abel qui, à la limite, arrive à la région dangereuse des séries semi-convergentes, et ne doit-on pas exiger pour le théorème d'Abel une démonstration absolument rigoureuse?

Mais voici une nouvelle objection, peut-être plus frappante, au raisonnement que j'ai critiqué : c'est que, pour certaines séries, il n'est pas possible d'assigner à n une valeur déterminée telle que $\psi(x)$ reste inférieur à un petit nombre donné ε, lorsque x varie dans les limites pour lesquelles la série est convergente. Considérons la série (3) et un terme u_p, de rang éloigné, dans cette série; ce terme est négatif pour les valeurs de x comprises entre zéro et $\frac{1}{4p^2}$ environ; pour $x = 1 - \frac{a}{p}$, a étant un nombre fini, il est sensiblement égal à $-\frac{1}{2p}(e^{-2a} - e^{-4a})$, c'est-à-dire de l'ordre de grandeur de $\frac{1}{p}$; pour $x > 1 - \frac{1}{4p^2}$, u_p est positif et tend vers $\frac{1}{4p^2}$ pour $x = 1$. Cela posé, donnons à n une valeur aussi grande qu'on voudra, mais déterminée, et voyons ce que devient $\psi(x)$ quand x croît de 0 à 1 : tant que $1 - x$ n'est pas très petit, $\psi(x)$ est négatif et visiblement très petit en valeur absolue; mais, quand x atteint les valeurs de la forme $1 - \frac{a}{n}$, $\psi(x)$ renferme un grand nombre de termes de grandeur comparable à ceux de même rang dans la série harmonique, et il cesse d'être très petit, et cela tant que x n'a pas atteint la valeur 1, pour laquelle $\psi(x)$, et non $\varphi(x)$, présente une discontinuité, compatible avec le nombre infini de ses termes; ce sont les valeurs négatives de ψ qui compensent l'excès de $\varphi(x)$ sur $L(1+x)$ quand x tend vers l'unité. Mais pour aucune valeur déterminée de n, $\psi(x)$ ne reste très petit; il ne resterait tel qu'à la condition de faire varier n; quoi qu'on fasse, un des termes de la démonstration que je discute tombe en défaut pour certaines séries, et on doit, ce me semble, toujours être sur ses gardes pour les autres.