NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

E. CESÀRO

Sur une équation aux différences mêlées

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 4 (1885), p. 36-40

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1885_3_4__36_0>

SUR UNE ÉQUATION AUX DIFFÉRENCES MÊLÉES;

PAR M. E. CESARO.

1. En partant d'une fonction arbitraire $y = f(x)$, l'équation

$$y_p\, dx = x\, dy_{p-1},$$

dont un cas particulier a été considéré par M. Catalan, fournit, de proche en proche, la série de fonctions

$$y_1 = xy', \quad y_2 = xy' + x^2 y'', \quad y_3 = xy' + 3x^2 y'' + x^3 y''',$$
$$y_4 = xy' + 7x^2 y'' + 6x^3 y''' + x^4 y^{\text{IV}}, \quad \ldots.$$

On est conduit à poser

$$(1) \qquad y_p = \lambda_{1,p}\, xy' + \lambda_{2,p}\, x^2 y'' + \lambda_{3,p}\, x^3 y''' + \ldots,$$

en prenant $\lambda_{m,p} = 0$, lorsque *m est supérieur à p* ou *inférieur à* 1.

2. Puisque les valeurs des nombres λ sont *indépendantes de la nature de la fonction y*, faisons, pour les déterminer, $y = x^m$. Il est clair que

$$y^{(p)} = m(m-1)(m-2)\ldots(m-p+1)\, x^{m-p}, \quad y_p = m^p x^m.$$

Si l'on pose

$$\delta_m = 1.2.3\ldots m\, \lambda_{m,p}, \quad u_m = m^p,$$

la relation (1) prend la forme *symbolique*

$$(\delta + 1)^m = u^m,$$

et l'on en déduit immédiatement

$$\delta_m = (u-1)^m = \Delta^m(u_0),$$

c'est-à-dire

$$\lambda_{m,p} = \frac{\Delta^m(0^p)}{1.2.3\ldots m}.$$

Par suite, la formule (1) devient

$$(2)\quad y_p = \frac{xy'}{1}\Delta(0^p) + \frac{x^2y''}{1.2}\Delta^2(0^p) + \frac{x^3y'''}{1.2.3}\Delta^3(0^p) + \ldots.$$

3. Pour *invertir* la dernière relation, il est évident que l'on peut poser

$$(3)\qquad x^p y^{(p)} = \mu_{1,p} y_1 + \mu_{2,p} y_2 + \mu_{3,p} y_3 + \ldots,$$

les nombres μ, analogues aux nombres λ, étant, comme ceux-ci, *indépendants de la nature de* y. Pour $y = x^m$, la formule (3) devient

$$m(m-1)(m-2)\ldots(m-p+1) = \mu_{1,p} m + \mu_{2,p} m^2 + \mu_{3,p} m^3 + \ldots.$$

Comme cette égalité doit être vérifiée *identiquement*, on voit que $(-1)^{p-r}\mu_{r,p}$ est la *somme des produits* $p-r$ *à* $p-r$ *des* $p-1$ *premiers nombres entiers*. Conséquemment, la relation (3) prend la forme *symbolique*

$$(4)\qquad x^p y^{(p)} = y(y-1)(y-2)\ldots(y-p+1).$$

4. Soit, par exemple, $y = x + x^2 + \ldots + x^n$; puis, faisons $x = 1$. Il est visible que

$$y^{(p)} = \frac{(n+1)n(n-1)\ldots(n-p+1)}{p+1},$$

$$y_p = s_p = 1^p + 2^p + 3^p + \ldots + n^p.$$

Par suite, l'égalité (2) devient

$$s_p = C_{n+1,2}\,\Delta(0^p) + C_{n+1,3}\,\Delta^2(0^p) + C_{n+1,4}\,\Delta^3(0^p) + \ldots.$$

Si B_p est le $p^{\text{ième}}$ *nombre de Bernoulli*, c'est-à-dire le *coefficient de* n *dans* s_p, la dernière relation donne immédiatement

$$B_p = \frac{1}{1.2}\Delta(0^p) - \frac{1}{2.3}\Delta^2(0^p) + \frac{1}{3.4}\Delta^3(0^p) - \ldots.$$

Ces égalités sont fort connues.

5. De même, la formule (4) donne lieu à l'identité symbolique

$$s(s-1)(s-2)\ldots(s-p+1)$$
$$= \frac{(n+1)n(n-1)\ldots(n-p+1)}{p+1}.$$

En considérant, dans les deux membres, les seuls coefficients de n, on obtient l'égalité *connue*

$$B(B-1)(B-2)\ldots(B-p+1) = \frac{(-1)^{p+1}}{p+1}1.2.3\ldots(p-1).$$

6. Dans le Mémoire *Sur une suite de polynômes entiers*, M. Catalan a considéré le cas particulier de n infini, en laissant x quelconque. Alors, à cause de

$$y^{(p)} = \frac{1.2.3\ldots p}{(1-x)^{p+1}},$$

la formule (2) devient

$$1 + 2^p x + 3^p x^2 + 4^p x^3 + \ldots$$
$$= \frac{\Delta(0^p)}{(1-x)^2} + \frac{x\Delta^2(0^p)}{(1-x)^3} + \frac{x^2\Delta^3(0^p)}{(1-x)^4} + \ldots$$

La série du premier membre est donc égale au quotient d'un polynôme entier, de degré $p-1$, par $(1-x)^{p+1}$. Cette propriété a été mise en évidence, par M. Catalan, dans le Mémoire cité.

7. Un cas plus remarquable est celui de $y = e^x$. On

trouve, d'après (2), pour $x = 1$,

$$\frac{1^p}{1} + \frac{2^p}{1.2} + \frac{3^p}{1.2.3} + \frac{4^p}{1.2.3.4} + \ldots = N_p e,$$

pourvu que l'on pose

$$N_p = \frac{\Delta(0^p)}{1} + \frac{\Delta^2(0)^p}{1.2} + \frac{\Delta^3(0^p)}{1.2.3} + \ldots.$$

On voit que N_p est un nombre entier, et, par suite, *la série considérée est égale à un certain nombre de fois le nombre e*. Cette propriété, énoncée par M. Dobinski, a été démontrée dans le tome IV de la *Nouvelle Correspondance mathématique*.

8. Les nombres N étant particulièrement importants, nous allons en dire quelques mots. On reconnaît sans difficulté qu'ils obéissent à la loi symbolique

$$(5) \qquad (N + 1)^p = N^{p+1},$$

qui donne, de proche en proche, pour les termes de la série N_1, N_2, N_3, ..., les valeurs

(6) 1, 2, 5, 15, 52, 203, 877, 4140, ...

Si l'on pose $N_{p+1} = \nu_p$, on sait que l'égalité (5) donne lieu à l'égalité symbolique générale

$$F(N + 1) = F(\nu).$$

Par exemple, pour $F(z) = (z - 1)^p$, on trouve

$$N_p = (\nu - 1)^p = N(N - 1)^p = \Delta^p(N_1).$$

Ainsi, *le $p^{\text{ième}}$ terme de la série* (6) *est égal à la $p^{\text{ième}}$ différence du premier terme*.

9. Prenons encore $F(z) = e^{xz}$; il vient

$$e^{(N+1)x} = e^{\nu x},$$

c'est-à-dire

$$e^x e^{Nx} = (e^{Nx})',$$

d'où

$$e^{e^x - 1} = 1 + N_1 \frac{x}{1} + N_2 \frac{x^2}{1.2} + N_3 \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots.$$

D'après cela,

$$N_p = \left(\frac{d^p e^{e^x - 1}}{dx^p}\right)_{x=0}.$$

10. Enfin, faisons remarquer la relation symbolique

$$N(N-1)(N-2)\ldots(N-p+1) = 1,$$

que l'on déduit immédiatement de (4).

11. Signalons, pour finir, l'expression de y_p sous forme d'intégrale définie. Moyennant l'égalité connue

$$\frac{\Delta^m(0^p)}{1.2.3\ldots p} = -\frac{2i}{\pi}\int_0^\pi (e^{\cos\theta + i\sin\theta} - 1)^m \sin p\theta\, d\theta,$$

la formule (2) donne

$$\frac{y_p}{1.2.3\ldots p} \equiv -\frac{2i}{\pi}\int_0^\pi f(x e^{\cos\theta + i\sin\theta}) \sin p\theta\, d\theta,$$

pourvu que l'on néglige la partie imaginaire du second membre. C'est pour exprimer cette restriction que nous avons remplacé par $\equiv$ le signe d'égalité. Par exemple, la dernière formule donne, pour les nombres N, cette expression générale

$$N_p \equiv -\frac{2i}{\pi e}\int_0^\pi e^{e^{e^{i\theta}}} \sin p\theta\, d\theta,$$

c'est-à-dire

$$N_p = \frac{2}{\pi e}\int_0^\pi e^{e^{\cos\theta}\cos(\sin\theta)} \sin[e^{\cos\theta}\sin(\sin\theta)] \sin p\theta\, d\theta.$$