NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

A. LEGOUX

Sur une nouvelle propriété d'un système triple de surfaces quartiques homofocales, comprenant comme cas particulier la surface des ondes

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 4 (1885), p. 393-408

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1885_3_4__393_0>

SUR UNE NOUVELLE PROPRIÉTÉ D'UN SYSTÈME TRIPLE DE SURFACES QUARTIQUES HOMOFOCALES, COMPRENANT COMME CAS PARTICULIER LA SURFACE DES ONDES;

PAR M. A. LEGOUX,
Professeur à la Faculté des Sciences de Toulouse.

Si l'on considère les surfaces représentées par l'équation

$$\frac{x^2}{r^2+\rho-a^2}+\frac{y^2}{r^2+\rho-b^2}+\frac{z^2}{r^2+\rho-c^2}=1, \tag{1}$$

où ρ représente un paramètre variable et où

$$r^2=x^2+y^2+z^2,$$

on a un système triple, car par un point donné on peut faire passer trois surfaces de ce système. Ce système triple jouit des propriétés suivantes :

1° Il comprend, comme cas particulier, la surface des ondes ordinaire, si l'on donne au paramètre ρ une valeur plus petite que les constantes a^2, b^2, c^2; c'est en effet la surface des ondes qui dérive de l'ellipsoïde

$$\frac{x^2}{a^2-\rho}+\frac{y^2}{b^2-\rho}+\frac{z^2}{c^2-\rho}=1. \tag{2}$$

2° Toutes les surfaces du système ont pour enveloppe une développable focale du huitième ordre et de quatrième classe; on trouve en effet la même enveloppe pour les surfaces (1) que pour les quadriques homofocales

$$\frac{x^2}{\lambda-a^2}+\frac{y^2}{\lambda-b^2}+\frac{z^2}{\lambda-c^2}=1;$$

donc les surfaces (1) sont homofocales aux surfaces quadriques précédentes. On arriverait à la même conclusion si, à la place de r^2, dans l'équation (1), on mettait une fonction quelconque de x, y, z.

3° Les sections principales des surfaces du système se composent d'une famille de cercles ayant pour centre l'origine, et d'une famille de coniques homofocales. Sur le plan XOY les équations de la section sont

$$r^2 + \rho - c^2 = 0$$

(cercles),

$$\frac{x^2}{b^2 - \rho} + \frac{y^2}{a^2 - \rho} = 1$$

(coniques homofocales).

On sait que la considération des systèmes triples homofocaux de surfaces du second ordre a permis d'étudier bien aisément les courbes tracées sur l'une de ces surfaces, en prenant pour lignes coordonnées, sur cette surface, ses intersections avec les deux autres. Le but de ce travail est de montrer que le système triple de surfaces du quatrième ordre se prête avec une grande facilité à l'étude des courbes tracées sur une surface d'onde ordinaire. Nous trouverons l'expression de l'arc infiniment petit en fonction de deux paramètres et nous remarquerons la simplicité de cette expression et son analogie avec la même formule relative aux courbes tracées sur l'ellipsoïde. Nous donnerons les équations différentielles des lignes de courbure, des lignes asymptotiques, sur une de ces surfaces d'onde.

Soient ρ, ρ_1, ρ_2 les trois valeurs du paramètre ρ qui correspondent à un point de l'espace (x, y, z), ou les trois racines de l'équation (1) lorsqu'on y suppose x, y, z connus et ρ inconnue. A l'une de ces racines correspondra une surface d'onde ordinaire dérivant de l'ellipsoïde; aux deux autres correspondront des surfaces quartiques homofocales à la précédente et dérivant de deux hyperboloïdes représentés par l'équation (2). Nous désignerons ces trois surfaces par la même dénomination de *surfaces d'ondes*, sans distinguer celle qui dérive de l'ellipsoïde des deux autres qui lui sont conjuguées ; nous les appellerons les *surfaces* ρ, ρ_1, ρ_2.

Enfin nous terminerons cette étude en montrant que toutes les propriétés descriptives communes aux surfaces (1) s'appliquent à un système triple formé par des surfaces de Kummer à seize points singuliers, dont les surfaces d'ondes ne sont que des cas particuliers.

FORMULES RELATIVES AUX COURBES TRACÉES SUR UNE SURFACE ρ_2.

L'équation (1) peut être écrite sous la forme suivante

$$\begin{aligned} x^2(r^2+\rho-b^2)(r^2+\rho-c^2)+y^2(r^2+\rho-c^2)(r^2+\rho-a^2)& \\ +z^2(r^2+\rho-a^2)(r^2+\rho-b^2)& \\ =(r^2+\rho-a^2)(r^2+\rho-b^2)(r^2+\rho-c^2)& \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} (r^2+\rho)^3-(r^2+\rho)^2(x^2+y^2+z^2+a^2+b^2+c^2)& \\ +(r^2+\rho)[(c^2+b^2)x^2+(a^2+c^2)y^2+(b^2+a^2)z^2& \\ -b^2c^2-a^2c^2-a^2b^2]& \\ -b^2c^2x^2-c^2a^2y^2-a^2b^2z^2-a^2b^2c^2=0.& \end{aligned}$$

Posons

$$r^2+\rho-a^2=\mathrm{T};$$

l'équation devient, en ordonnant relativement à T,

$$\mathrm{T}^3-\mathrm{A}\mathrm{T}^2+\mathrm{B}\mathrm{T}-(a^2-b^2)(a^2-c^2)x^2=0.$$

Mais nous avons appelé ρ, ρ_1, ρ_2 les trois racines de l'équation en ρ : on aura donc

$$\begin{aligned} (r^2+\rho-a^2)(r^2+\rho_1-a^2)(r^2+\rho_2-a^2)& \\ =(a^2-b^2)(a^2-c^2)r^2& \end{aligned}$$

et

$$r^2+\rho-a^2+r^2+\rho_1-a^2+r^2+\rho_2-a^2=r^2+c^2+b^2-2a^2.$$

On tire de la seconde

$$r^2 = \frac{a^2+b^2+c^2}{2} - \frac{\rho+\rho_1+\rho_2}{2};$$

et, en substituant dans la première, il vient

$$x^2 = \frac{\left\{\begin{array}{c}\left(\dfrac{a^2+b^2+c^2}{2} + \dfrac{\rho-\rho_1-\rho_2}{2} - a^2\right)\left(\dfrac{a^2+b^2+c^2}{2} + \dfrac{\rho_1-\rho-\rho_2}{2} - a^2\right) \\ \times\left(\dfrac{a^2+b^2+c^2}{2} + \dfrac{\rho_2-\rho-\rho_1}{2} - a^2\right)\end{array}\right\}}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)};$$

de simples permutations de lettres donneront

$$y^2 = \frac{\left\{\begin{array}{c}\left(\dfrac{a^2+b^2+c^2}{2} + \dfrac{\rho-\rho_1-\rho_2}{2} - b^2\right)\left(\dfrac{a^2+b^2+c^2}{2} + \dfrac{\rho_1-\rho-\rho_2}{2} - b^2\right) \\ \times\left(\dfrac{a^2+b^2+c^2}{2} + \dfrac{\rho_2-\rho-\rho_1}{2} - b^2\right)\end{array}\right\}}{(b^2-c^2)(b^2-a^2)},$$

$$z^2 = \frac{\left\{\begin{array}{c}\left(\dfrac{a^2+b^2+c^2}{2} + \dfrac{\rho-\rho_1-\rho_2}{2} - c^2\right)\left(\dfrac{a^2+b^2+c^2}{2} + \dfrac{\rho_1-\rho-\rho_2}{2} - c^2\right) \\ \times\left(\dfrac{a^2+b^2+c^2}{2} + \dfrac{\rho_2-\rho-\rho_1}{2} - c^2\right)\end{array}\right\}}{(c^2-a^2)(c^2-b^2)}.$$

Si l'on pose, pour simplifier l'écriture,

$$\lambda = \frac{a^2+b^2+c^2}{2} + \frac{\rho-\rho_1-\rho_2}{2},$$

$$\mu = \frac{a^2+b^2+c^2}{2} + \frac{\rho_1-\rho_2-\rho}{2},$$

$$\nu = \frac{a^2+b^2+c^2}{2} + \frac{\rho_2-\rho-\rho_1}{2},$$

les formules précédentes deviennent

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} x^2 &= \frac{(\lambda-a^2)(\mu-a^2)(\nu-a^2)}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)}, \\ y^2 &= \frac{(\lambda-b^2)(\mu-b^2)(\nu-b^2)}{(b^2-c^2)(b^2-a^2)}, \\ z^2 &= \frac{(\lambda-c^2)(\mu-c^2)(\nu-c^2)}{(c^2-a^2)(c^2-b^2)}. \end{aligned}\right.$$

On remarque que ces formules ont la même forme que celles obtenues en définissant la position d'un point de l'espace par l'intersection des trois surfaces quadriques homofocales suivantes :

$$\frac{x^2}{\lambda - a^2} + \frac{y^2}{\lambda - b^2} + \frac{z^2}{\lambda - c^2} = 1,$$

$$\frac{x^2}{\mu - a^2} + \frac{y^2}{\mu - b^2} + \frac{z^2}{\mu - c^2} = 1,$$

$$\frac{x^2}{\nu - a^2} + \frac{y^2}{\nu - b^2} + \frac{z^2}{\nu - c^2} = 1.$$

On remarquera aussi que λ, μ, ν sont des fonctions linéaires des coordonnées ρ, ρ_1, ρ_2, ce qui permettra de passer facilement d'une équation entre les premières coordonnées à l'équation entre les secondes.

Si nous posons

$$-\varphi(u) = (\lambda - u)(\mu - u)(\nu - u),$$
$$f(u) = (u - a^2)(u - b^2)(u - c^2).$$

on trouve aisément

$$x^2 = -\frac{\varphi(a^2)}{f'(a^2)}, \quad y^2 = -\frac{\varphi(b^2)}{f'(b^2)}, \quad z^2 = -\frac{\varphi(c^2)}{f'(c^2)};$$

d'où

$$dx = \frac{x}{2}\left(\frac{d\lambda}{\lambda - a^2} + \frac{d\mu}{\mu - a^2} + \frac{d\nu}{\nu - a^2}\right),$$

$$dy = \frac{y}{2}\left(\frac{d\lambda}{\lambda - b^2} + \frac{d\mu}{\mu - b^2} + \frac{d\nu}{\nu - b^2}\right),$$

$$dz = \frac{z}{2}\left(\frac{d\lambda}{\lambda - c^2} + \frac{d\mu}{\mu - c^2} + \frac{d\nu}{\nu - c^2}\right).$$

et

$$4\,ds^2 = \frac{\varphi'(\lambda)}{f(\lambda)}d\lambda^2 + \frac{\varphi'(\mu)}{f(\mu)}d\mu^2 + \frac{\varphi'(\nu)}{f(\nu)}d\nu^2 :$$

et, comme

$$d\lambda = \frac{d\rho - d\rho_1 - d\rho_2}{2},$$

$$d\mu = \frac{d\rho_1 - d\rho_2 - d\rho}{2},$$

$$d\nu = \frac{d\rho_2 - d\rho - d\rho_1}{2},$$

ou a

$$16\,ds^2 = \frac{\varphi'(\lambda)}{f(\lambda)}(d\rho - d\rho_1 - d\rho_2)^2$$
$$+ \frac{\varphi'(\mu)}{f(\mu)}(d\rho_1 - d\rho_2 - d\rho)^2 + \frac{\varphi'(\nu)}{f(\nu)}(d\rho_2 - d\rho - d\rho_1)^2.$$

Proposons-nous maintenant d'étudier les courbes tracées sur la surface d'onde $\rho_2 = \text{const.}$; on aura, pour l'expression d'un arc de courbe tracé sur cette surface, les lignes coordonnées étant les traces sur la surface ρ_2 des surfaces conjuguées ρ et ρ_1,

$$16\,ds^2 = \left[\frac{\varphi'(\lambda)}{f(\lambda)} + \frac{\varphi'(\mu)}{f(\mu)} + \frac{\varphi'(\nu)}{f(\nu)}\right](d\rho^2 + d\rho_1^2)$$
$$+ 2\left[-\frac{\varphi'(\lambda)}{f(\lambda)} - \frac{\varphi'(\mu)}{f(\mu)} + \frac{\varphi'(\nu)}{f(\nu)}\right] d\rho\, d\rho_1.$$

La forme particulière de l'expression de ds nous conduit à faire les remarques suivantes :

1° Les deux surfaces d'onde ρ et ρ_1 coupent la surface ρ_2 suivant deux systèmes de courbes, du douzième ordre (¹), qui se rencontrent sous un angle variable. Le système triple précédent est donc seulement homofocal, il n'est pas orthogonal ; par conséquent les lignes d'intersection de ρ_2 avec ρ et ρ_1 ne sont pas les lignes de courbure de la surface ρ_2.

2° Si l'on fait, dans la formule précédente,

$$\rho_1 = \rho_2 = C,$$

on aura l'enveloppe des surfaces ρ_1 et ρ_2 : cherchons la forme du ds^2 sur cette enveloppe ; on a

$$\lambda = \frac{\rho - 2\rho_1}{2} + \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2},$$
$$\mu = \frac{-\rho}{2} + \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2},$$
$$\nu = \frac{-\rho}{2} - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2};$$

(¹) *Voir* la note placée au bas de la page 401.

d'où

$$\varphi'(\mu) = \varphi'(\nu) = 0$$

et

$$16\, ds^2 = \frac{\varphi'(\lambda)}{f(\lambda)}(d\rho - d\rho_1)^2.$$

C'est précisément la forme qu'affecte le ds^2 d'une courbe tracée sur une développable focale; donc l'enveloppe des surfaces du système est bien une telle développable, ce qu'on a déjà vu directement. Cette développable est du huitième ordre et de quatrième classe.

3° On saura déterminer sur chaque surface ρ_2 les lignes de longueur nulle; leur équation différentielle est

$$ds^2 = 0$$

ou bien

$$\left[\frac{\varphi'(\lambda)}{f(\lambda)} + \frac{\varphi'(\mu)}{f(\mu)} + \frac{\varphi'(\nu)}{f(\nu)}\right](d\rho^2 + d\rho_1^2)$$
$$+ 2\left[-\frac{\varphi'(\lambda)}{f(\lambda)} - \frac{\varphi'(\mu)}{f(\mu)} + \frac{\varphi'(\nu)}{f(\nu)}\right] d\rho\, d\rho_1 = 0.$$

4° On pourra aussi écrire les équations de l'arête de rebroussement de la développable focale circonscrite aux surfaces du système; il suffira de faire

$$\rho = \rho_1 = \rho_2,$$

d'où

$$\lambda = \mu = \nu = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} - \frac{\rho}{2}$$

et

$$x^2 = \frac{(\lambda - a^2)^3}{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)},$$

$$y^2 = \frac{(\lambda - b^2)^3}{(b^2 - c^2)(b^2 - a^2)},$$

$$z^2 = \frac{(\lambda - c^2)^3}{(c^2 - a^2)(c^2 - b^2)};$$

posons

$$M = (a^2 - b^2)(b^2 - c^2)(c^2 - a^2)$$

et éliminons λ entre les trois équations précédentes ; il vient

$$\lambda - a^2 - \left(\frac{M}{c^2 - b^2}\right)^{\frac{1}{3}} x^{\frac{2}{3}}$$
$$= b^2 + \left(\frac{M}{a^2 - c^2}\right)^{\frac{1}{3}} y^{\frac{2}{3}} = c^2 + \left(\frac{M}{b^2 - a^2}\right)^{\frac{1}{3}} z^{\frac{2}{3}};$$

c'est une ligne du douzième ordre.

5° On peut déterminer l'intersection de la développable focale précédente avec la surface ρ_2. La surface $\rho_2 = \alpha$ aura avec cette développable focale deux séries de points communs : 1° ceux qu'on obtiendra en faisant $\rho = \rho_1$; 2° ceux qu'on obtiendra en donnant à ρ ou à ρ_1 la même valeur α. Les premiers points constituent l'enveloppe des courbes que tracent sur ρ_2 les deux systèmes de surfaces conjuguées ρ et ρ_1.

Faisons $\rho = \rho_1$ dans les formules générales (3), on aura d'abord

$$\lambda = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2} - \frac{\rho_2}{2},$$
$$\mu = \frac{a^2 - b^2 - c^2}{2} - \frac{\rho_2}{2},$$
$$\nu = \frac{a^2 - b^2 - c^2}{2} - \frac{\rho_2}{2} - \rho;$$

les valeurs de x^2, y^2, z^2 prendront la forme

$$x^2 = B(A - \rho), \quad y^2 = B'(A' - \rho), \quad z^2 = B''(A'' - \rho),$$

où A, A', A'', B, B', B'' sont des constantes.

On en tire

$$A - \frac{x^2}{B} = A' - \frac{y^2}{B'} = A'' - \frac{z^2}{B''};$$

c'est une courbe du quatrième ordre, intersection de deux cylindres du second ordre.

Les seconds points sont sur la courbe limite, intersection de la surface d'onde ρ_2 avec la surface infiniment voisine de ρ_2; on les obtient en faisant ρ ou $\rho_1 = \rho_2 = \alpha$.

Soit, par exemple, $\rho_1 = \rho_2 = \alpha$; des formules générales

$$\lambda = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} - \alpha + \frac{\rho}{2},$$

$$\mu = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} - \frac{\rho}{2},$$

$$\nu = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} - \frac{\rho}{2}$$

on déduit

$$\mathrm{M}x^2 = \left(\frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2} - \alpha + \frac{\rho}{2}\right)\left(\frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2} - \frac{\rho}{2}\right)^2 (c^2 - b^2),$$

$$\mathrm{M}y^2 = \left(\frac{a^2 - b^2 + c^2}{2} - \alpha + \frac{\rho}{2}\right)\left(\frac{a^2 - b^2 + c^2}{2} - \frac{\rho}{2}\right)^2 (a^2 - c^2),$$

$$\mathrm{M}z^2 = \left(\frac{b^2 - c^2 + a^2}{2} - \alpha + \frac{\rho}{2}\right)\left(\frac{b^2 - c^2 + a^2}{2} - \frac{\rho}{2}\right)^2 (b^2 - a^2),$$

en posant

$$\mathrm{M} = (a^2 - b^2)(b^2 - c^2)(c^2 - a^2).$$

Ces trois équations, dans lesquelles on considère ρ comme un paramètre variable, représentent une courbe gauche du douzième ordre ([1]), de telle façon que l'intersection de la développable focale circonscrite avec la surface ρ_2 se compose : 1° d'une courbe du quatrième ordre; 2° d'une courbe du douzième ordre qui compte double, qui équivaut par suite à une ligne du vingt-quatrième ordre; 3° du cercle de l'infini qui compte double également; ce qui forme en tout une intersection du trente-

---

([1]) Soit $\mathrm{A}x + \mathrm{B}y + \mathrm{C}z = \mathrm{D}$ l'équation d'un plan quelconque. Pour trouver le nombre de points de la courbe qui sont situés dans ce plan, il suffit de remplacer x, y, z par leurs valeurs en fonctions de ρ, ce qui donnera une équation qui, rendue rationnelle, sera du douzième degré en ρ; d'où l'on conclut qu'il y a douze points dans le plan. Un calcul pareil montre que deux surfaces du système ρ et ρ_1 se coupent suivant une ligne du douzième ordre.

deuxième ordre. Comme la développable focale est du huitième ordre, son intersection avec la surface ρ_2 est effectivement du trente-deuxième ordre.

Considérons un point O de la surface ρ_2 et les deux courbes d'intersection de ρ_2 avec ρ et ρ_1 ; soient ρ et ρ_1 les coordonnées du point O, $\rho + d\rho$, $\rho_1 + d\rho_1$ les coordonnées d'un point M infiniment voisin de O. On peut considérer M et O comme les deux sommets opposés d'un parallélogramme dont les côtés OA et OB sont dirigés suivant les lignes ρ et ρ_1 qui passent par le point O. Posons $OA = d\sigma_1$, $OB = d\sigma$, $AOB = \varphi$,

$$E = \frac{1}{16}\left[\frac{\varphi'(\lambda)}{f(\lambda)} + \frac{\varphi'(\mu)}{f(\mu)} + \frac{\varphi'(\nu)}{f(\nu)}\right],$$

$$F = \frac{1}{16}\left[-\frac{\varphi'(\lambda)}{f(\lambda)} - \frac{\varphi'(\mu)}{f(\mu)} + \frac{\varphi'(\nu)}{f(\nu)}\right];$$

on aura

$$d\sigma_1 = \sqrt{E}\,d\rho_1, \quad d\sigma = \sqrt{E}\,d\rho, \quad \cos\varphi = \frac{F}{E},$$

$$ds^2 = d\sigma^2 + d\sigma_1^2 + 2\,d\sigma\,d\sigma_1\cos\varphi.$$

Cherchons les équations des bissectrices des angles formés par les deux courbes ρ et ρ_1 qui se croisent au point O sur la surface ρ_2, on aura

$$d\sigma = d\sigma_1, \quad d\sigma = -\,d\sigma_1$$

ou

$$\rho - \rho_1 = C, \quad \rho + \rho_1 = C'.$$

Si, dans les formules générales (3), on fait $\rho + \rho_1 = C'$, on a $r^2 =$ const.; et, en combinant cette équation avec l'équation (1), on voit que l'on a une conique sphérique.

Si l'on fait $\rho - \rho_1 = C$, λ et μ sont constants; la courbe est par suite une courbe du quatrième ordre, intersection de deux quadriques homofocales.

D'où il résulte qu'en chaque point de la surface ρ_2 il passe : 1° une conique sphérique; 2° une courbe du quatrième ordre, intersection de deux quadriques homofocales. Ces courbes sont bissectrices des angles des deux courbes ρ et ρ_1; elles constituent donc un système orthogonal sur la surface ρ_2.

Or les formules relatives aux courbes tracées sur une surface sont beaucoup plus simples lorsque l'on rapporte les points de cette surface à un système orthogonal tracé sur la surface. Nous prendrons désormais pour variables nouvelles les quantités u et v liées aux précédentes par les relations

$$\rho + \rho_1 = u, \quad \rho - \rho_1 = v.$$

Il est bien évident d'ailleurs que l'on passera sans difficulté d'une équation entre u et v à une équation entre les ρ et ρ_1.

Posons, pour simplifier l'écriture,

$$m = a^2 + b^2 + c^2 - \rho_2, \quad p = a^2 + b^2 + c^2 + \rho_2,$$

on aura

$$\lambda = \frac{m}{2} + \frac{v}{2}, \quad \mu = \frac{m}{2} - \frac{v}{2}, \quad \nu = \frac{p}{2} - \frac{u}{2};$$

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} x^2 &= \frac{c^2 - b^2}{8M}[(m - 2a^2)^2 - v^2](p - u - 2a^2) = P(k - w)(l - u), \\ y^2 &= \frac{a^2 - c^2}{8M}[(m - 2b^2)^2 - v^2](p - u - 2b^2) = P'(k' - w)(l' - u), \\ z^2 &= \frac{b^2 - a^2}{8M}[(m - 2c^2)^2 - v^2](p - u - 2c^2) = P''(k'' - w)(l'' - u), \end{aligned}\right.$$

P, P′, P″; k, k', k''; l, l', l'' désignant des constantes et $w = v^2$.

Ces dernières formules, qui donnent x, y, z en fonction de deux paramètres u et w, nous paraissent les plus simples que l'on puisse trouver pour étudier la géométrie des lignes tracées sur une surface d'onde ρ_2.

On en déduira

$$dx = \frac{x}{2}\left(\frac{du}{u-l} + \frac{dw}{w-k}\right),$$

$$dy = \frac{y}{2}\left(\frac{du}{u-l'} + \frac{dw}{w-k'}\right),$$

$$dz = \frac{z}{2}\left(\frac{du}{u-l''} + \frac{dw}{w-k''}\right)$$

et

$$ds^2 = \mathrm{E}\,du^2 + \mathrm{G}\,dw^2,$$

en posant

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} 4\mathrm{E} &= \mathrm{P}\,\frac{w-k}{u-l} + \mathrm{P}'\,\frac{w-k'}{u-l'} + \mathrm{P}''\,\frac{w-k''}{u-l''} \\ &= \frac{1}{2}\,\frac{w-(u+m-p)^2}{(u-p+2a^2)(u-p+2b^2)(u-p+2c^2)}, \\ 4\mathrm{G} &= \mathrm{P}\,\frac{u-l}{w-k} + \mathrm{P}'\,\frac{u-l'}{w-k'} + \mathrm{P}''\,\frac{u-l''}{w-k''} \\ &= \frac{1}{2}\,\frac{(u+m)(w+\mathrm{H}) + \mathrm{L} - m\mathrm{H}}{[w-(m-2a^2)^2][w-(m-2b^2)^2][w-(m-2c^2)^2]}, \end{aligned}\right.$$

L et H désignant des constantes.

Adoptons les notations de Gauss, c'est-à-dire posons

$$dx = a\,du + a'\,dw,\quad dy = b\,du + b'\,dw,\quad dz = c\,du + c'\,dw,$$

il vient

$$a = \frac{x}{2}\,\frac{1}{u-l},\qquad b = \frac{y}{2}\,\frac{1}{u-l'},\qquad c = \frac{z}{2}\,\frac{1}{u-l''};$$

$$a' = \frac{x}{2}\,\frac{1}{w-k},\qquad b' = \frac{y}{2}\,\frac{1}{w-k'},\qquad c' = \frac{z}{2}\,\frac{1}{w-k''}.$$

Posons aussi

$$d^2x = \alpha\,du^2 + 2\alpha'\,du\,dw + \alpha''\,dw^2,$$

$$d^2y = \beta\,du^2 + 2\beta'\,du\,dw + \beta''\,dw^2,$$

$$d^2z = \gamma\,du^2 + 2\gamma'\,du\,dw + \gamma''\,dw^2;$$

on aura

$$\alpha = -\frac{x}{4}\,\frac{1}{(u-l)^2},$$

$$\alpha' = \frac{x}{4}\,\frac{1}{(u-l)(w-k)},$$

$$\alpha'' = \frac{x}{4}\,\frac{1}{(w-k)^2},$$

$$\beta = -\frac{y}{4}\,\frac{1}{(u-l')^2},$$

$$\beta' = \frac{y}{4}\,\frac{1}{(u-l')(w-k')},$$

$$\beta'' = -\frac{y}{4}\,\frac{1}{(w-k')^2},$$

$$\gamma = -\frac{z}{4}\,\frac{1}{(u-l'')^2},$$

$$\gamma' = \frac{z}{4}\,\frac{1}{(u-l'')(w-k'')},$$

$$\gamma'' = -\frac{z}{2}\,\frac{1}{(w-k'')^2}.$$

Soient $A = bc' - cb'$, $B = ca' - ac'$, $C = ab' - ba'$, il vient

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} A &= \frac{yz}{4}\left[\frac{1}{(u-l')(w-k'')} - \frac{1}{(u-l'')(w-k')}\right],\\ B &= \frac{zx}{4}\left[\frac{1}{(u-l'')(w-k)} - \frac{1}{(u-l)(w-k'')}\right],\\ C &= \frac{xy}{4}\left[\frac{1}{(u-l)(w-k')} - \frac{1}{(u-l')(w-k)}\right]. \end{aligned}\right.$$

Enfin posons

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} E' &= A\alpha + B\beta + C\gamma,\\ F' &= A\alpha' + B\beta' + C\gamma',\\ G' &= A\alpha'' + B\beta'' + C\gamma''; \end{aligned}\right.$$

on trouvera aisément

$$(7\ bis)\quad \left\{\begin{aligned} E' = -\frac{xyz}{16}\Bigg[&\frac{l-l'}{(u-l)^2(u-l')^2(w-k'')}\\ &+\frac{l'-l''}{(u-l')^2(u-l'')^2(w-k)}\\ &+\frac{l''-l}{(u-l'')^2(u-l)^2(w-k')}\Bigg],\\ F' = \frac{xyz}{16}\Bigg[&\frac{kl'-k'l+k'l''-k''l'+k''l-kl''}{(u-l)(u-l')(u-l'')(w-k)(w-k')(w-k'')}\Bigg],\\ G' = -\frac{xyz}{16}\Bigg[&\frac{k-k''}{(w-k)^2(w-k'')^2(u-l')}\\ &+\frac{k'-k}{(w-k')^2(w-k)^2(u-l'')}\\ &+\frac{k''-k'}{(w-k'')^2(w-k')^2(u-l)}\Bigg]. \end{aligned}\right.$$

ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE DES LIGNES DE COURBURE D'UNE SURFACE D'ONDE.

On sait que l'équation différentielle des lignes de courbure d'une surface est (voir SALMON, *Géométrie*, p. 253)

$$\begin{vmatrix} dw^2 & -du\,dw & du^2 \\ E & F & G \\ E' & F' & G' \end{vmatrix} = 0$$

ou, en développant,

$$(8)\qquad GF'dw^2 + (GE' - EG')du\,dw - EF'du^2 = 0;$$

et, si l'on remarque que l'on a

$$d\sigma_1 = \sqrt{E}\,du, \quad d\sigma = \sqrt{G}\,dw,$$

$$\sqrt{EG}\,F'd\sigma^2 + (GE' - EG')d\sigma\,d\sigma_1 - \sqrt{EG}\,F'd\sigma_1^2 = 0.$$

ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE DES LIGNES ASYMPTOTIQUES.

L'équation différentielle des lignes asymptotiques sera

$$E'du^2 + 2F'du\,dw + G'dw^2 = 0$$

(SALMON, *ibid.*, p. 256).

RAYON DE COURBURE D'UNE SECTION NORMALE.

La formule qui donne le rayon de courbure d'une section normale à la surface d'onde ρ_2 passant par le point u, w et par le point infiniment voisin $u + du$, $w + dw$ est

$$\rho = \frac{(E\,du^2 + G\,dw^2)V}{E'du^2 + 2F'du\,dw + G'dw^2},$$

où

$$V = \sqrt{EG}$$

(SALMON, *ibid.*, p. 255).

GÉNÉRALISATION DES RÉSULTATS PRÉCÉDENTS.

Toutes les *propriétés descriptives* démontrées pour les surfaces précédentes s'étendent aux surfaces obtenues par une transformation homographique. Or M. Cayley a démontré que la surface des ondes ordinaire n'est qu'un cas particulier d'une surface qu'il a nommée *tétraédroïde* et dont il a donné l'équation en coordonnées homogènes. Le tétraédroïde n'est autre que la transformée homographique de la surface des ondes.

On peut donc conclure de ce qui précède que, si l'on transforme par l'homographie les surfaces d'ondes étudiées précédemment, on obtiendra un système triple de tétraédroïdes, lesquels seront inscrits dans une même développable du huitième ordre et de quatrième classe.

Mais le tétraédroïde de M. Cayley n'est lui-même qu'un cas particulier de la surface de Kummer du quatrième ordre à seize points singuliers. Il y a donc lieu d'étendre les résultats précédents à ces dernières surfaces.

On sait, en effet, que la surface de Kummer à seize points singuliers est la surface des singularités d'un complexe de droites du deuxième degré, c'est-à-dire le lieu des points de l'espace où le cône complexe du second degré se décompose en deux plans (Klein, *Mathematische Annalen,* t. II, p. 216). On sait aussi que si ce complexe du second degré est formé par des droites telles que l'on puisse mener de chacune d'elles deux plans tangents rectangulaires à un ellipsoïde, la surface des singularités est la surface des ondes ordinaire (Painvin, *Bulletin des Sciences mathématiques,* t. II, p. 368).

Le travail précédent me paraît établir un lien entre les complexes du second degré et les systèmes de surfaces homofocales.