

FAUQUEMBERGUE

**Questions proposées par M. Réalis
(voir 3e série, t. II, p. 370)**

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 4
(1885), p. 427-429

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1885_3_4__427_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1885, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

QUESTIONS PROPOSÉES PAR M. RÉALIS
(voir 3^e série, t. II, p. 370);**SOLUTIONS DE M. FAUQUEMBERGUE.**

Professeur au lycée de Nice.

I. L'équation

$$x^4 - 2\alpha^2 x^2 + 4\alpha\beta x + \alpha^4 + \beta^2 = 0,$$

dans laquelle α est un entier quelconque et β un entier différent de zéro et de $\pm 4\alpha^2$, n'a pas de racine entière.

Cette équation peut se mettre sous la forme

$$(2\alpha x)^2 - (x^2 - \alpha^2)^2 = (2\alpha x + \beta)^2.$$

Or, on a identiquement

$$(2\alpha x)^2 + (x^2 - \alpha^2)^2 = (x^2 + \alpha^2)^2.$$

Il en résulterait donc

$$(2\alpha x)^4 - (x^2 - \alpha^2)^4 = [(x^2 + \alpha^2)(2\alpha x + \beta)]^2,$$

équation impossible, car la différence de deux bicarrés ne peut être un carré.

Il y a exception pour $x^2 - \alpha^2 = 0$, $x = \pm \alpha$, avec la condition $\beta = 0$ ou $\beta = \pm 4\alpha^2$.

Note. — On peut consulter, au sujet de la proposition que nous venons de rappeler et de celles que nous rencontrerons plus loin, le Tome II de la *Théorie des Nombres*, de Legendre, ou un Mémoire de Lebesgue, inséré dans le *Journal de Liouville* (1853), sur la résolution des équations biquadratiques

$$z^2 = x^4 \pm 2^m y^4, \quad z^2 = 2^m x^4 - y^4, \quad 2^m z^2 = x^4 \pm y^4.$$

On y trouve, par exemple, que les équations

$$x^4 \pm y^4 = z^2, \quad x^4 \pm y^4 = 2z^2, \quad x^4 + 2y^4 = z^2,$$

$$x^4 \pm y^4 = z^2, \quad x^4 - 8y^4 = z^2$$

sont impossibles en nombres rationnels.

La plupart de ces propositions sont également démontrées dans les *Recherches sur l'Analyse indéterminée*, de M. E. Lucas (Moulins-sur-Allier, 1873).

II. L'équation

$$x^4 - 2\alpha^2 x^2 + 4\alpha\beta x + \alpha^4 - 2\beta^2 = 0,$$

dans laquelle α est un entier quelconque et β un entier différent de zéro et de $\pm 2\alpha^2$, n'a pas de racine entière.

On voit immédiatement que l'équation peut s'écrire

$$x^4 + \alpha^4 = 2(\alpha x - \beta)^2.$$

Sous cette forme, on reconnaît qu'elle est impossible, excepté pour $x = \pm \alpha$ et $\beta = 0$, ou $\beta = \pm 2\alpha^2$.

III. L'équation

$$x^4 + (5\alpha^2 + 4\beta)x^2 + 2\alpha(2\alpha^2 + \beta)x + \alpha^4 - \beta^2 = 0,$$

dans laquelle α est un entier quelconque et β un entier différent de $\pm \alpha^2$ et de $3\alpha^2$, n'a pas de racine entière.

Cette équation revient à la suivante

$$(x + \alpha)^4 + 4x^4 = (2x^2 + \alpha x - \beta)^2,$$

dont l'impossibilité est connue.

Il y a exception pour $x = 0$, $\beta = \pm \alpha^2$ et $x = -\alpha$, $\beta = 3\alpha^2$.

IV. L'équation

$$x^4 - (5\alpha^2 + 4\beta)x^2 + 2\alpha(2\alpha^2 + \beta)x - (\alpha^4 - \beta^2) = 0,$$

dans laquelle α est un entier quelconque et β un entier différent de $\pm \alpha^2$, n'a pas de racine entière.

On peut l'écrire

$$(x - \alpha)^4 + 2x^4 = (\alpha x^2 - \alpha x - \beta)^2;$$

elle n'est possible que pour $x = 0$, $\beta = \pm \alpha^2$.

V. L'équation

$$x^4 - \frac{x^2 + \beta}{2} x^2 + \alpha(x^2 + \beta)x - \frac{x^4 - \beta^2}{4} = 0,$$

où α et β sont des entiers de même parité, β étant différent de $\pm x^2$, n'a pas de racine entière.

En la mettant sous la forme

$$(x - \alpha)^4 - 4x^4 = [x^2 - 2\alpha x - \beta]^2,$$

on reconnaît qu'elle n'est possible que pour $x = 0$,
 $\beta = \pm x^2$.
