FAUQUEMBERGUE

Questions proposées par M. Réalis (voir 3e série, t. II, p. 370)

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 4 (1885), p. 427-429

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1885_3_4__427_0>

QUESTIONS PROPOSÉES PAR M. RÉALIS

(voir 3e série, t. II, p. 370);

SOLUTIONS DE M. FAUQUEMBERGUE,
Professeur au lycée de Nice.

I. L'équation

$$x^4 - 2\alpha^2 x^2 + 4\alpha\beta x + \alpha^4 + \beta^2 = 0,$$

dans laquelle α est un entier quelconque et β un entier différent de zéro et de $\pm 4\alpha^2$, n'a pas de racine entière.

Cette équation peut se mettre sous la forme

$$(2\alpha x)^2 - (x^2 - \alpha^2)^2 = (2\alpha x + \beta)^2.$$

Or, on a identiquement

$$(2\alpha x)^2 + (x^2 - \alpha^2)^2 = (x^2 + \alpha^2)^2.$$

Il en résulterait donc

$$(2\alpha x)^4 - (x^2 - \alpha^2)^4 = [(x^2 + \alpha^2)(2\alpha x + \beta)]^2,$$

équation impossible, car la différence de deux bicarrés ne peut être un carré.

Il y a exception pour $x^2 - \alpha^2 = 0$, $x = \pm\alpha$, avec la condition $\beta = 0$ ou $\beta = \pm 4\alpha^2$.

Note. — On peut consulter, au sujet de la proposition que nous venons de rappeler et de celles que nous rencontrerons plus loin, le Tome II de la *Théorie des Nombres*, de Legendre, ou un Mémoire de Lebesgue, inséré dans le *Journal de Liouville* (1853), sur la résolution des équations biquadratiques

$$z^2 = x^4 \pm 2^m y^4, \quad z^2 = 2^m x^4 - y^4, \quad 2^m z^2 = x^4 \pm y^4.$$

On y trouve, par exemple, que les équations

$$x^4 \pm y^4 = z^2, \quad x^4 \pm y^4 = 2z^2, \quad x^4 + 2y^4 = z^2.$$
$$x^4 \pm 4y^4 = z^2, \quad x^4 - 8y^4 = z^2$$

sont impossibles en nombres rationnels.

La plupart de ces propositions sont également démontrées dans les *Recherches sur l'Analyse indéterminée*, de M. E. Lucas (Moulins-sur-Allier, 1873).

II. L'équation

$$x^4 - 2\alpha^2 x^2 + 4\alpha\beta x + \alpha^4 - 2\beta^2 = 0,$$

dans laquelle α est un entier quelconque et β un entier différent de zéro et de $\pm 2\alpha^2$, n'a pas de racine entière.

On voit immédiatement que l'équation peut s'écrire

$$x^4 + \alpha^4 = 2(\alpha x - \beta)^2.$$

Sous cette forme, on reconnaît qu'elle est impossible, excepté pour $x = \pm \alpha$ et $\beta = 0$, ou $\beta = \pm 2\alpha^2$.

III. L'équation

$$x^4 + (5\alpha^2 + 4\beta)x^2 + 2\alpha(2\alpha^2 + \beta)x + \alpha^4 - \beta^2 = 0,$$

dans laquelle α est un entier quelconque et β un entier différent de $\pm \alpha^2$ et de $3\alpha^2$, n'a pas de racine entière.

Cette équation revient à la suivante

$$(x + \alpha)^4 + 4x^4 = [2x^2 + \alpha x - \beta]^2,$$

dont l'impossibilité est connue.

Il y a exception pour $x = 0$, $\beta = \pm \alpha^2$ et $x = -\alpha$, $\beta = 3\alpha^2$.

IV. L'équation

$$x^4 - (5\alpha^2 + 4\beta)x^2 + 2\alpha(2\alpha^2 + \beta)x - (\alpha^4 - \beta^2) = 0,$$

dans laquelle α est un entier quelconque et β un entier différent de $\pm \alpha^2$, n'a pas de racine entière.

On peut l'écrire

$$(x - \alpha)^4 + 2x^4 = (2x^2 - \alpha x - \beta)^2;$$

elle n'est possible que pour $x = 0$, $\beta = \pm \alpha^2$.

V. L'équation

$$x^4 - \frac{\alpha^2+\beta}{2}x^2 + \alpha(\alpha^2+\beta)x - \frac{\alpha^4-\beta^2}{4} = 0,$$

où α et β sont des entiers de même parité, β étant différent de $\pm\alpha^2$, n'a pas de racine entière.

En la mettant sous la forme

$$(x-\alpha)^4 - 4x^4 = [x^2 - 2\alpha x - \beta]^2,$$

on reconnaît qu'elle n'est possible que pour $x = 0$, $\beta = \pm\alpha^2$.