Solutions de questions proposées dans les Nouvelles annales

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 4 (1885), p. 432-435
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1885_3_4__432_1>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 1456

(voir 3e série, t. II, p. 336);

PAR M. DROZ.

Soient a, a'; b, b'; c, c' *les points d'intersection d'une conique et des côtés* BC, CA, AB *d'un triangle*

ABC; *démontrer que les six droites* Aa, Aa', Bb, Bb', Cc, Cc' *enveloppent une autre conique.*

(H. SCHRŒTER.)

Solution.

On sait que les tangentes, menées des sommets A, B, C d'un triangle ABC, à une courbe de $n^{\text{ième}}$ classe, rencontrent les côtés opposés BC, CA, AB respectivement, suivant des groupes de n points a, a', a'', ..., b, b', b'', ..., c, c', c'', ..., tels que la relation

$$\frac{a\mathrm{B}}{a\mathrm{C}}\cdot\frac{a'\mathrm{B}}{a'\mathrm{C}}\cdots\frac{b\mathrm{C}}{b\mathrm{A}}\cdot\frac{b'\mathrm{C}}{b'\mathrm{A}}\cdots\frac{c\mathrm{A}}{c\mathrm{B}}\cdot\frac{c'\mathrm{A}}{c'\mathrm{B}}\cdots=(-1)^n$$

est vérifiée. (CHASLES, *Géométrie supérieure,* deuxième édition, p. 355, § 508.)

Les cinq droites Aa', Bb, Bb', Cc, Cc' enveloppent une conique déterminée; on peut lui mener du point A une seconde tangente, et, en désignant par X le point de rencontre de cette tangente et du côté BC, on aura, d'après la relation générale qui précède,

$$(1)\qquad \frac{\mathrm{XB}}{\mathrm{XC}}\cdot\frac{a'\mathrm{B}}{a'\mathrm{C}}\cdot\frac{b\mathrm{C}}{b\mathrm{A}}\cdot\frac{b'\mathrm{C}}{b'\mathrm{A}}\cdot\frac{c\mathrm{A}}{c\mathrm{B}}\cdot\frac{c'\mathrm{A}}{c'\mathrm{B}}=1.$$

Mais, entre les segments déterminés sur les côtés du triangle ABC par cette conique, on a, d'après le théorème de Carnot,

$$(2)\qquad \frac{a\mathrm{B}}{a\mathrm{C}}\cdot\frac{a'\mathrm{B}}{a'\mathrm{C}}\cdot\frac{b\mathrm{C}}{b\mathrm{A}}\cdot\frac{b'\mathrm{C}}{b'\mathrm{A}}\cdot\frac{c\mathrm{A}}{c\mathrm{B}}\cdot\frac{c'\mathrm{A}}{c'\mathrm{B}}=1.$$

Les égalités (1) et (2) donnent $\frac{\mathrm{XB}}{\mathrm{XC}}=\frac{a\mathrm{B}}{a\mathrm{C}}$; il en faut conclure que les points X, a coïncident : donc les six droites Aa, Aa', Bb, Bb', Cc, Cc' enveloppent une conique.

Note. — La même question a été résolue par M. Moret-Blanc.

Question 1461
(voir 3e série, t. II, p. 382);

PAR UN ANONYME.

Par un des points d'intersection A (*fig.* 1) *de deux hyperboles équilatères, de même centre* O, *on mène une sécante qui rencontre les deux courbes en* B, B'; *de ces points on abaisse des perpendiculaires* BC, B'C' *sur les tangentes aux deux courbes, au même point* A; *démontrer que l'angle* COC' *est quadruple de l'angle des asymptotes.* (E. FAUQUEMBERGUE.)

Tout se réduit à faire voir que l'angle COC' (*fig.* 1) est le double de l'angle CAC'' des tangentes AC, AC''; car on sait déjà que ce dernier angle est le double de

Fig. 1.

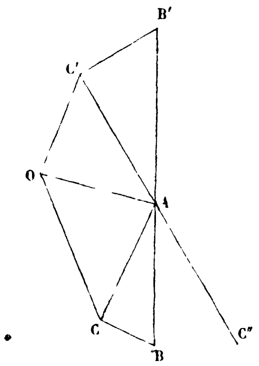
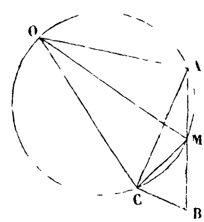


Fig. 2.



celui des asymptotes (*voir* 3e série, t. II, p. 332). Or l'égalité COC' = 2CAC'' résulte des considérations suivantes.

Soient A (*fig.* 2) un point d'une hyperbole équilatère dont O est le centre; AC une tangente; M le milieu d'une corde AB, issue du point A; C la projection de l'extrémité B de cette corde sur la tangente.

L'angle AOM des droites OA, OM, menées du centre au point de contact A et au milieu M de la corde AB, est égal à l'angle CAM de la tangente et de la corde. C'est une proposition connue ([1]).

Mais, le point M étant le milieu de l'hypoténuse AB du triangle rectangle ACB, l'angle CAM = ACM; donc

$$\mathrm{AOM} = \mathrm{ACM},$$

il s'ensuit que les quatre points A, M, C, O appartiennent à une même circonférence. Dans cette circonférence, les cordes AM, MC étant égales entre elles, les arcs sous-tendus AM, MC sont de même égaux; donc l'angle

$$\mathrm{AOC} = 2\,\mathrm{CAM} = 2\,\mathrm{CAB}.$$

Ainsi (*fig.* 1), on a AOC = 2CAB, de même

$$\mathrm{AOC'} = 2\,\mathrm{C'AB'} = 2\,\mathrm{C''AB};$$

d'où

$$\mathrm{COC'} = 2(\mathrm{CAB} + \mathrm{C''AB}) = 2\,\mathrm{CAC''}.$$

C. Q. F. D.

Note. — MM. Moret-Blanc et Barisien ont résolu la même question au moyen des calculs de la Géométrie analytique.

([1]) En voici la démonstration. Soient D et D' les points de rencontre de l'une des deux asymptotes de l'hyperbole équilatère, et des droites CA, MA prolongées. On a AD = OA, MD' = OM; par suite les égalités d'angles :

$$\mathrm{AOD} = \mathrm{ADO},\quad \mathrm{MOD'} = \mathrm{MD'O},\quad \mathrm{MOD'} - \mathrm{AOD} = \mathrm{MD'O} - \mathrm{ADO},$$

ou

$$\mathrm{AOM} = \mathrm{DAD'} = \mathrm{CAM}.$$

(G.)