NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

BARBARIN

Note sur l'herpolhodie

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 4 (1885), p. 538-556

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1885_3_4__538_0>

NOTE SUR L'HERPOLHODIE (¹);

PAR M. BARBARIN,
Professeur au lycée de Toulon.

Poinsot a démontré que, quand un corps qui n'est soumis à aucune force extérieure tourne autour d'un point fixe, son ellipsoïde d'inertie demeure constamment tangent à un plan invariable. Le point de contact décrit sur l'ellipsoïde une courbe du quatrième ordre, connue sous le nom de *polhodie*, et trace sur le plan fixe une autre courbe, appelée *herpolhodie*. Les propriétés de la première courbe sont bien connues; c'est une courbe fermée entourant sur l'ellipsoïde l'extrémité du plus grand axe ou l'extrémité du plus petit; elle se réduit, par exception, au système de deux ellipses lorsqu'elle passe par le sommet de l'axe moyen, ou aux parallèles de l'ellipsoïde quand celui-ci est de révolution. On sait enfin que la polhodie se projette suivant une ellipse sur le plan du petit axe et du moyen, ainsi que sur le plan du grand axe et du moyen, et suivant une hyperbole sur le plan du grand et du petit axe (*voir*, à ce sujet, le *Traité de Mécanique* de M. Collignon).

Je me propose, dans cette Note, de résumer les propriétés les plus remarquables de l'herpolhodie.

(¹) Cet article nous a été envoyé par M. Barbarin à la date du 28 janvier 1882, et nous n'avons malheureusement pu le publier plus tôt à cause de nos engagements antérieurs. M. Barbarin n'avait donc aucune connaissance de la Note de M. de Sparre, insérée aux *Comptes rendus* le 24 novembre 1884, lorsqu'il a fait son travail. CH. B.

I. — Équation de l'herpolhodie.

D'après le théorème de Poinsot, le mouvement est réglé en ce que la polhodie roule sans glisser sur l'herpolhodie. Si donc on désigne par S et σ les arcs des deux courbes décrits dans le même temps, à partir du même instant initial, on a

$$S = \sigma \quad \text{et} \quad dS = d\sigma.$$

Je déterminerai S et σ en fonction des coordonnées polaires ρ, ω de l'herpolhodie sur le plan fixe, le pôle étant pris au pied P de la perpendiculaire menée à ce plan par le centre de l'ellipsoïde. Donc, relativement à cette courbe, on a d'abord

$$d\sigma^2 = d\rho^2 + \rho^2\, d\omega^2.$$

Soit maintenant

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \tag{1}$$

l'ellipsoïde; si je désigne par δ la distance du point fixe o au plan fixe, la polhodie est définie par l'équation précédente et

$$\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4} = \frac{1}{\delta^2}. \tag{2}$$

Je joindrai à ces équations la suivante :

$$x^2 + y^2 + z^2 = \delta^2 + \rho^2. \tag{3}$$

J'écarte d'abord le cas où l'ellipsoïde serait de révolution autour de son grand axe a; alors

$$b = c$$

et

$$\rho^2 = \frac{(a^2 - \delta^2)(\delta^2 - b^2)}{\delta^2};$$

l'herpolhodie est alors un cercle ayant P pour centre.

Il en serait de même si l'ellipsoïde était de révolution autour de son petit axe.

Soit donc

$$a > b > c.$$

En résolvant le système des équations (1), (2), (3) par rapport à x^2, y^2, z^2, je trouve d'abord

$$x^2 = \frac{-a^4(b^2-c^2)}{(a^2-b^2)(b^2-c^2)(c^2-a^2)}\left[\rho^2 + \frac{1}{\delta^2}(\delta^2-b^2)(\delta^2-c^2)\right].$$

Je poserai, pour abréger,

$$(a^2-b^2)(b^2-c^2)(c^2-a^2) = \mathrm{D},$$
$$(\delta^2-a^2)(\delta^2-b^2)(\delta^2-c^2) = u.$$

J'aurai donc simplement

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} x^2 &= \frac{-a^4(b^2-c^2)}{\mathrm{D}}\left[\rho^2 + \frac{u}{\delta^2(\delta^2-a^2)}\right],\\ y^2 &= \frac{-b^4(c^2-a^2)}{\mathrm{D}}\left[\rho^2 + \frac{u}{\delta^2(\delta^2-b^2)}\right],\\ z^2 &= \frac{-c^4(a^2-b^2)}{\mathrm{D}}\left[\rho^2 + \frac{u}{\delta^2(\delta^2-c^2)}\right],\end{aligned}\right.$$

équations qui peuvent s'écrire sous la forme

$$(4')\quad \left\{\begin{aligned} x^2 &= \alpha(\rho^2 + r_1) \quad \text{avec} \quad \alpha = \frac{-a^4(b^2-c^2)}{\mathrm{D}}, \quad \ldots,\\ y^2 &= \beta(\rho^2 + r_2) \quad\;\; \text{»} \quad\;\; r_1 = \frac{u}{\delta^2(\delta^2-a^2)}, \quad \ldots.\\ z^2 &= \gamma(\rho^2 + r_3).\end{aligned}\right.$$

En différentiant ces équations, j'ai

$$x\,dx = \alpha\rho\,d\rho,$$
$$y\,dy = \beta\rho\,d\rho,$$
$$z\,dz = \gamma\rho\,d\rho;$$

donc, pour obtenir l'arc de polhodie en fonction de ρ,

$$\begin{aligned} d\mathrm{S}^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 &= \left(\frac{\alpha^2}{x^2} + \frac{\beta^2}{y^2} + \frac{\gamma^2}{z^2}\right)\rho^2\,d\rho^2,\\ &= \left(\frac{\alpha}{\rho^2 - r_1} + \frac{\beta}{\rho^2 + r_2} + \frac{\gamma}{\rho^2 + r_3}\right)\rho^2\,d\rho^2;\end{aligned}$$

d'où

$$d\rho^2 + \rho^2\, d\omega^2 = \rho^2\, d\rho^2 \left(\frac{\alpha}{\rho^2 + r_1} + \frac{\beta}{\rho^2 + r_2} + \frac{\gamma}{\rho^2 + r_3} \right).$$

L'équation différentielle de l'herpolhodie est donc

$$(5) \quad d\omega = \frac{d\rho}{\rho} \sqrt{\left(\frac{\alpha}{\rho^2 + r_1} + \frac{\beta}{\rho^2 + r_2} + \frac{\gamma}{\rho^2 + r_3} \right) \rho^2 - 1},$$

et la recherche de cette courbe se trouve ramenée ainsi à une quadrature.

En abordant maintenant les simplifications, on a

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\alpha}{\rho^2 + r_1} + \frac{\beta}{\rho^2 + r_2} + \frac{\gamma}{\rho^2 + r_3} \right) \rho^2 - 1 \\ &= \frac{\left[\begin{array}{c} \alpha(\rho^2 + r_2)(\rho^2 + r_3) + \beta(\rho^2 + r_3)(\rho^2 + r_1) \\ + \gamma(\rho^2 + r_1)(\rho^2 + r_2) \end{array} \right]}{(\rho^2 + r_1)(\rho^2 + r_2)(\rho^2 + r_3)} - 1 \\ &= \frac{\left\{ \begin{array}{l} (\alpha + \beta + \gamma - 1)\rho^6 \\ \quad + [\alpha(r_2 + r_3) + \beta(r_3 + r_1) + \gamma(r_1 + r_2) - (r_1 + r_2 + r_3)]\rho^4 \\ \quad + (\alpha r_2 r_3 + \beta r_3 r_1 + \gamma r_1 r_2 - r_2 r_3 - r_3 r_1 - r_1 r_2)\rho^2 - r_1 r_2 r_3 \end{array} \right\}}{(\rho^2 + r_1)(\rho^2 + r_2)(\rho^2 + r_3)}. \end{aligned}$$

1°
$$\alpha + \beta + \gamma - 1 = 0;$$

2°
$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha(r_2 + r_3) + \beta(r_3 + r_1) + \gamma(r_1 + r_2) - (r_1 + r_2 + r_3) \\ \quad = (\beta + \gamma - 1) r_1 + (\gamma + \alpha - 1) r_2 + (\alpha + \beta - 1) r_3 \\ \quad = -\alpha r_1 - \beta r_2 - \gamma r_3 = -\delta^2; \end{array} \right.$$

3°
$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha r_2 r_3 + \beta r_3 r_1 + \gamma r_1 r_2 - r_2 r_3 - r_3 r_1 - r_1 r_2 \\ \quad = -(\beta + \gamma) r_2 r_3 - (\gamma + \alpha) r_3 r_1 - (\alpha + \beta) r_1 r_2 \\ \quad = -\alpha r_1 (r_2 + r_3) - \beta r_2 (r_3 + r_1) - \gamma r_3 (r_1 + r_2); \end{array} \right.$$

or

$$r_2 + r_3 = \frac{u(2\delta^2 - b^2 - c^2)}{\delta^2(\delta^2 - b^2)(\delta^2 - c^2)},$$

donc

$$-\alpha r_1 (r_2 + r_3) = \frac{a^4 (b^2 - c^2)(2\delta^2 - b^2 - c^2) u}{D\delta^4},$$

de même

$$-\beta r_2 (r_3 + r_1) = \frac{b^4 (c^2 - a^2)(2\delta^2 - c^2 - a^2) u}{D\delta^4},$$

$$-\gamma r_3 (r_1 - r_2) = \frac{c^4 (a^2 - b^2)(2\delta^2 - a^2 - b^2) u}{D\delta^4};$$

donc

$$-\alpha r_1(r_2+r_3)-\beta r_2(r_3+r_1)-\gamma r_3(r_1+r_2)=\frac{-2u}{\delta^2},$$

4°
$$-r_1 r_2 r_3=-\frac{u^2}{\delta^6}.$$

L'équation (5) se transforme et devient finalement

(6)
$$d\omega=\delta\frac{\left(\rho^2+\frac{u}{\delta^4}\right)d\rho}{\rho\sqrt{-(\rho^2+r_1)(\rho^2+r_2)(\rho^2+r_3)}}.$$

Le problème dépend donc d'une quadrature elliptique.

II. — Discussion et forme de la courbe.

Cette forme dépend des diverses circonstances que présente l'équation différentielle précédente quand on y fait varier δ depuis c jusqu'à a en passant par la valeur intermédiaire b. Ce sont ces circonstances que nous allons étudier :

1° *δ varie de c à b : la polhodie entoure le sommet du petit axe.* — Au début, pour $\delta=c$, $r_1=0$, $r_2=0$, $u=0$, $r_3=\frac{(c^2-a^2)(c^2-b^2)}{c^2}$ et $\rho=0$. L'herpolhodie se réduit à son pôle P; le corps tourne autour du petit axe de son ellipsoïde, qui demeure fixe. A mesure que δ augmente, la courbe s'élargit progressivement; alors

$$\delta^2-c^2>0,\quad \delta^2-b^2<0,\quad \delta^2-a^2<0;$$

d'où

$$u>0,\quad r_1<0,\quad r_2<0,\quad r_3>0;$$

le radical, qui est au dénominateur du second membre de l'équation (6), s'annule pour deux valeurs distinctes de ρ

$$\rho_1=\sqrt{-r_1},\quad \rho_2=\sqrt{-r_2}$$

et

$$\rho_2>\rho_1.$$

Du reste, ce radical ne doit pas cesser d'être réel, et, par suite, $(\rho^2+r_1)(\rho^2+r_2)(\rho^2+r_3)$ d'être négatif, ce qui exige $(\rho^2+r_1)(\rho^2+r_2)<0$, puisque $\rho^2+r_3>0$. Donc ρ est compris entre ρ_1 et ρ_2,

$$\rho_1<\rho<\rho_2.$$

La courbe ne possède de points que dans la bande annulaire C_1C_2 formée par les deux cercles concentriques à P et ayant ρ_1, ρ_2 pour rayons; de plus,

$$d(\rho_1^2)=\frac{2(b^2c^2-\delta^4)}{\delta^3},$$

$$d(\rho_2^2)=\frac{2(a^2c^2-\delta^4)}{\delta^3},$$

$$\rho_2^2-\rho_1^2=(a^2-b^2)\left(1-\frac{c^2}{\delta^2}\right),$$

ce qui fait voir que :

1° ρ_1 augmente depuis o jusqu'au maximum $b-c$, quand δ augmente de c à $\sqrt{bc}<b$; puis ρ_1 diminue pour retourner à o quand δ devient égal à b.

2° ρ_2 augmente aussi avec δ depuis o jusqu'au maximum $a-c$, atteint pour $\delta=\sqrt{ac}$. Lorsque $\delta=b$, la valeur de ρ_2 est $\sqrt{\frac{(b^2-c^2)(a^2-b^2)}{b^2}}$.

3° En tout cas, la bande annulaire, d'abord très étroite, s'élargit quand δ augmente, puisque $\rho_2^2-\rho_1^2$ augmente avec δ.

La courbe est tangente aux cercles PC_1, PC_2 qui l'enserrent; car, pour $\rho=\rho_1$ ou $\rho=\rho_2$, $\frac{d\rho}{d\omega}=0$. Les contacts sont périodiques. En effet, l'angle $\widehat{M_1PM_2}$ de deux rayons de contact consécutifs est l'intégrale définie

$$\Omega_1^2=\omega_2-\omega_1=\delta\int_{\rho_1}^{\rho_2}\frac{\left(\rho^2+\frac{u}{\delta^4}\right)d\rho}{\rho\sqrt{-(\rho^2+r_1)(\rho^2+r_2)(\rho^2+r_3)}},$$

qui a une valeur constante pour une valeur fixe de δ.

Les rayons de contact PM_1, PM_2, ... sont des axes de symétrie de la courbe. En effet, soient, de part et d'autre du point M_2, deux points μ, μ' de la courbe où ρ a la même valeur :

$$\widehat{\mu P M_2} = \omega = \quad \delta \int_{\rho}^{\rho_2} \frac{\left(\rho^2 + \frac{u}{\delta^4}\right) d\rho}{\rho\sqrt{-(\rho^2 + r_1)(\rho^2 + r_2)(\rho^2 + r_3)}}.$$

$$\widehat{M_2 P \mu'} = \omega' = -\delta \int_{\rho_2}^{\rho} \frac{\left(\rho^2 + \frac{u}{\delta^4}\right) d\rho}{\rho\sqrt{-(\rho^2 + r_1)(\rho^2 + r_2)(\rho^2 + r_3)}};$$

car, de μ en M_2, $d\rho > 0$, tandis que, de M_2 en μ', $d\rho < 0$; donc

$$\omega' = \omega,$$

donc μ et μ' sont symétriques l'un de l'autre par rapport à la droite PM_2. M_1, M_2, ... sont les sommets de la courbe; en chacun d'eux le point de la polhodie qui est sur la courbe fixe appartient aux plans principaux de l'ellipsoïde. Je vais déterminer deux limites de l'angle $\widehat{M_1 P M_2} = \Omega_1^2$ et montrer que cet angle est, en général, $> \frac{\pi}{2}$.

Pour cela, je fais varier continuement ρ de ρ_1 à ρ_2; dans cet intervalle, $\rho^2 + r_3$ augmente continuement de $r_3 - r_1$ à $r_3 - r_2$; d'après un théorème connu, l'intégrale Ω_1^2 est donc comprise entre les limites suivantes :

Limite inférieure :

$$L_1 = \frac{\delta}{\sqrt{r_3 - r_2}} \int_{\rho_1}^{\rho} \frac{\left(\rho^2 - \frac{u}{\delta^4}\right) d\rho}{\rho\sqrt{-(\rho^2 - r_1)(\rho^2 + r_2)}} = \frac{\delta}{\sqrt{r_3 - r_2}} P;$$

Limite supérieure :

$$L_2 = \frac{\delta}{\sqrt{r_3 - r_1}} \int_{\rho_1}^{\rho} \frac{\left(\rho^2 - \frac{u}{\delta^4}\right) d\rho}{\rho\sqrt{-(\rho^2 + r_1)(\rho^2 - r_2)}} = \frac{\delta}{\sqrt{r_3 - r_1}} P.$$

Je calcule l'intégrale définie P. En posant $\rho^2 = t$, on a

$$\int \frac{\left(\rho^2 + \frac{u}{\delta^4}\right) d\rho}{\rho\sqrt{-(\rho^2+r_1)(\rho^2+r_2)}} = \frac{1}{2}\int \frac{\left(t + \frac{u}{\delta^4}\right) dt}{t\sqrt{-(t+r_1)(t+r_2)}}$$
$$= \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{-(t+r_1)(t+r_2)}} + \frac{u}{2\delta^4}\int \frac{dt}{t\sqrt{-(t+r_1)(t+r_2)}}.$$

Ces deux intégrales indéfinies se calculent aisément; leur somme est

$$\frac{1}{2}\arcsin\frac{2t+r_1+r_2}{r_1-r_2} + \frac{u}{2\delta^4\sqrt{r_1 r_2}}\arcsin\frac{-(r_1+r_2)t - 2r_1 r_2}{t(r_1-r_2)}$$
$$= \frac{1}{2}\arcsin\frac{2\rho^2+r_1+r_2}{r_1-r_2} + \frac{u}{2\delta^4\sqrt{r_1 r_2}}\arcsin\frac{-(r_1+r_2)\rho^2 - 2r_1 r_2}{\rho^2(r_1-r_2)};$$

donc la valeur de P est

$$P = \frac{1}{2}\arcsin\frac{2\rho_2^2+r_1+r_2}{r_1-r_2} + \frac{u}{2\delta^4\sqrt{r_1 r_2}}\arcsin\frac{-(r_1+r_2)\rho_2^2 - 2r_1 r_2}{\rho_2^2(r_1-r_2)}$$
$$- \frac{1}{2}\arcsin\frac{2\rho_1^2+r_1+r_2}{r_1-r_2} - \frac{u}{2\delta^4\sqrt{r_1 r_2}}\arcsin\frac{-(r_1+r_2)\rho_1^2 - 2r_1 r_2}{\rho_1^2(r_1-r_2)}$$

ou

$$P = \frac{\pi}{2}\left(1 + \frac{u}{\delta^4\sqrt{r_1 r_2}}\right);$$

donc

$$L_1 = \frac{\pi}{2\sqrt{b^2-c^2}}\left(\frac{\delta^2}{\sqrt{a^2-\delta^2}} + \sqrt{b^2-\delta^2}\right),$$
$$L_2 = \frac{\pi}{2\sqrt{a^2-c^2}}\left(\frac{\delta^2}{\sqrt{b^2-\delta^2}} + \sqrt{a^2-\delta^2}\right);$$

pour $\delta = c$, la valeur initiale de L_1 est

$$\frac{c^2+\sqrt{(a^2-c^2)(b^2-c^2)}}{\sqrt{(a^2-c^2)(b^2-c^2)}}\,\frac{\pi}{2},$$

quantité supérieure à $\frac{\pi}{2}$, et sa valeur finale est, pour $\delta = b$,

$$\frac{b^2}{\sqrt{(a^2-b^2)(b^2-c^2)}}\,\frac{\pi}{2}.$$

Il y a lieu de distinguer, suivant que cette valeur est $\gtreqless \frac{\pi}{2}$:

1° $\dfrac{b^2}{\sqrt{(a^2-b^2)(b^2-c^2)}} > 1$. La valeur finale de L_1 est $> \frac{\pi}{2}$. Le sens de la variation de L_1 est indiqué par le signe de $\frac{dL_1}{d\delta}$ ou, à un facteur près qui est constamment positif, par le signe du trinôme bicarré

$$(a^2+b^2)\delta^4 - a^2(a^2+4b^2)\delta^2 + (4b^2-a^2)a^4.$$

Ce trinôme a toujours deux racines réelles et distinctes en δ^2, l'une positive et supérieure à b^2, l'autre inférieure. Désignons-la par d_1.

$d_1 \leqq c^2$. Le trinôme reste négatif de $\delta = c$ à $\delta = b$. L_1 diminue et, par suite, reste toujours $> \frac{\pi}{2}$. *A fortiori*, il en est de même de Ω_1^2.

$d_1 > c^2$. Le trinôme est positif de $\delta = c$ à $\delta = d_1$, puis devient négatif. L_1 augmente d'abord, pour diminuer ensuite, mais sans cesser d'être $> \frac{\pi}{2}$. Ainsi de Ω_1^2.

2° $\dfrac{b^2}{\sqrt{(a^2-b^2)(b^2-c^2)}} = 1$. Mêmes conclusions que plus haut.

3° $\dfrac{b^2}{\sqrt{(a^2-b^2)(b^2-c^2)}} < 1$. Pour les valeurs de δ avoisinant c, L_1 et *a fortiori* Ω_1^2 sont $> \frac{\pi}{2}$; mais, pour les valeurs de δ avoisinant b, L_1 devient $< \frac{\pi}{2}$. On ne peut donc rien conclure au sujet de Ω_1^2. Cependant il est aisé de voir que, quand δ est très proche de b, Ω_1^2 a une très grande valeur absolue. Dans ce cas, en effet, si l'on désigne par ε, ε_1, ε_3 trois infiniment petits du même ordre, on a

$$\frac{u}{\delta^4} = \varepsilon, \quad r_1 = \varepsilon_1, \quad r_3 = \varepsilon_3,$$

et, par suite,

$$\Omega_1^2 = \delta \int_{\rho_1}^{\rho_2} \frac{(\rho^2 + \varepsilon)\,d\rho}{\rho\sqrt{-(\rho^2+\varepsilon_1)(\rho^2+r_2)(\rho^2+\varepsilon_3)}}.$$

En négligeant les infiniment petits d'ordre supérieur, remarquant que, ε_3 et ε_1 étant de signes contraires, leur somme est négligeable aussi, il reste simplement

$$\begin{aligned}\Omega_1^2 &= \delta \int_{\sqrt{-\varepsilon_1}}^{\rho_2} \frac{(\rho^2+\varepsilon)\,d\rho}{\rho^3\sqrt{\rho_2^2-\rho^2}} \\ &= \delta \int_{\sqrt{-\varepsilon_1}}^{\rho_2} \frac{d\rho}{\rho\sqrt{\rho_2^2-\rho^2}} + \delta\varepsilon \int_{\sqrt{-\varepsilon_1}}^{\rho_2} \frac{d\rho}{\rho^3\sqrt{\rho_2^2-\rho^2}};\end{aligned}$$

or

$$\int \frac{d\rho}{\rho\sqrt{\rho_2^2-\rho^2}} = -\frac{1}{\rho_2}\mathcal{L}\left(\frac{\rho_2}{\rho} + \sqrt{\frac{\rho_2^2}{\rho^2} - 1}\right)$$

et, en posant $\frac{\rho_2^2}{\rho^2} = u^2$,

$$\begin{aligned}\int \frac{d\rho}{\rho^3\sqrt{\rho_2^2-\rho^2}} &= -\frac{1}{\rho_2^3}\int \frac{u^2\,du}{\sqrt{u^2-1}} \\ &= -\frac{1}{\rho_2^3}\int \sqrt{u^2-1}\,du - \frac{1}{\rho_2^3}\mathcal{L}(u+\sqrt{u^2-1});\end{aligned}$$

mais l'intégration par parties donne

$$\int \sqrt{u^2-1}\,du = u\sqrt{u^2-1} - \int \frac{u^2\,du}{\sqrt{u^2-1}};$$

de là résulte

$$\int \frac{u^2\,du}{\sqrt{u^2-1}} = \frac{1}{2}\left[u\sqrt{u^2-1} + \mathcal{L}(u+\sqrt{u^2-1})\right]$$

et, par conséquent,

$$\int \frac{d\rho}{\rho^3\sqrt{\rho_2^2-\rho^2}} = -\frac{1}{2\rho_2^3}\left[\frac{\rho^2}{\rho}\sqrt{\frac{\rho_2^2}{\rho^2}-1} + \mathcal{L}\left(\frac{\rho^2}{\rho}+\sqrt{\frac{\rho_2^2}{\rho^2}-1}\right)\right];$$

donc

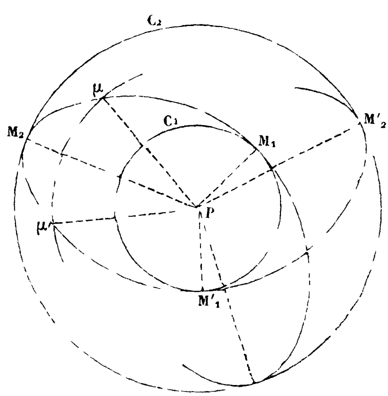
$$\Omega_1^2 = -\frac{\delta}{\rho_2}\left(1+\frac{\varepsilon}{2\rho_2^2}\right)\mathcal{L}\,\frac{\rho_2+\sqrt{\rho_2^2-\rho^2}}{\rho} - \frac{\delta\varepsilon}{2\rho_2^2}\,\frac{\sqrt{\rho_2^2-\rho^2}}{\rho^2},$$

cette intégrale indéfinie étant prise entre les limites $\sqrt{-\varepsilon_1}$ et ρ_2.

Si ε, ε_1 tendent simultanément vers zéro, δ tendant vers b, la limite de Ω_1^2 est infinie.

Donc, en général, quand δ varie de c à b, l'herpolhodie se compose d'une succession de boucles égales dont les sommets se déplacent dans le sens où ω croît.

Fig. 1.



Cette courbe peut se fermer quand le nombre de ses axes est fini, ou que l'angle $\Omega_1^2 = \widehat{M_1PM_2}$ est commensurable avec l'angle droit; dans le cas contraire, elle se prolonge indéfiniment sans revenir au point du départ, et le nombre de ses axes est infini.

2° $\delta = b$: *la polhodie est une ellipse passant par l'axe moyen.* — Dans ce cas,

$$u = 0, \quad r_1 = 0, \quad r_3 = 0, \quad r_2 = \frac{(a^2 - b^2)(c^2 - b^2)}{b^2} = -\rho_2^2$$

L'équation (6) se simplifie et devient

$$(7) \qquad d\omega = \frac{b\,d\rho}{\rho\sqrt{\rho_2^2 - \rho^2}};$$

d'où

$$\omega = -\frac{b}{\rho_2}\,\mathcal{L}\,\frac{\rho_2 + \sqrt{\rho_2^2 - \rho^2}}{\rho},$$

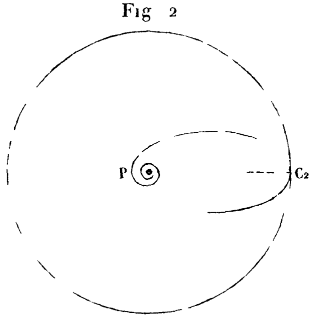
si l'on compte l'arc à partir du moment où $\rho = \rho_2$.

De là, aisément,

$$\rho = \frac{2\rho_2}{e^{\frac{\rho_2\omega}{b}} + e^{-\frac{\rho_2\omega}{b}}}$$

L'herpolhodie est une spirale tangente au cercle PC_2 pour $\omega = 0$, intérieure à ce cercle et se rapprochant du

Fig 2



pôle P, point asymptote autour duquel elle tourne indéfiniment. Quoique ce point ne soit atteint que pour $\omega = \infty$, néanmoins la longueur de la spirale est finie, car elle est égale à celle de l'ellipse polhodie. Supposons le corps placé de telle sorte que l'axe moyen de son ellipsoïde d'inertie soit dirigé suivant oP. Si, dans cet état, on fait tourner le corps, la rotation persiste indéfiniment autour de oP; mais, si, en provoquant la rotation, on dérange légèrement l'ellipsoïde, l'axe instantané évolue alors un nombre infini de fois autour de oP en s'éloignant jusqu'à ce que son extrémité I, atteignant le sommet de la polhodie qui est dans le plan du grand et du petit axe, vienne se placer sur le plan fixe au point C_2. En vertu de la vitesse acquise, le mouvement se continue, et l'axe instantané, dépassant cette position, recommence à évoluer un nombre infini de fois autour de oP, s'en rapprochant cette fois sur la seconde branche de la courbe. L'axe moyen tend à reprendre son orientation première, mais sa direction s'est totalement renversée; le corps s'est retourné sur lui-même.

3° *δ varie de b à a : la polhodie entoure le sommet du grand axe.* — Dans ce cas,

$$\delta^2 - a^2 < 0, \quad \delta^2 - b^2 > 0, \quad \delta^2 - c^2 > 0;$$

d'où

$$u < 0, \quad r_1 > 0, \quad r_2 < 0, \quad r_3 < 0, \quad \rho_2 > \rho_3.$$

En faisant une analyse analogue à celle qui a déjà été faite quand δ était $< b$, on arrive aux conclusions suivantes :

La courbe demeure comprise dans la bande annulaire formée par les deux cercles concentriques PC_2, PC_3 ayant pour rayons $\rho_2 = \sqrt{-r_2}$ et $\rho_3 = \sqrt{-r_3}$. Elle est alternativement tangente à chacun d'eux, et les rayons de contact sont des axes de symétrie; ρ_3 augmente progressivement de 0 au maximum $a - b$ lorsque δ croît, puis il diminue pour redevenir 0 quand $\delta = a$; ρ_2 part de la valeur $\sqrt{\dfrac{(b^2 - c^2)(a^2 - b^2)}{b^2}}$, augmentant jusqu'à $a - c$ si $\sqrt{ac} < b$ et diminuant ensuite jusqu'à 0, ou bien diminuant dès le début si $\sqrt{ac} < b$.

Dans tous les cas,

$$\rho_2^2 - \rho_3^2 = (b^2 - c^2)\left(\frac{a^2}{\delta^2} - 1\right);$$

la bande se rétrécit donc à mesure que δ croît.

L'angle $\widehat{M_2PM_3}$ de deux axes de symétrie consécutifs est

$$\Omega_3^2 = \delta \int_{\rho_3}^{\rho_2} \frac{\left(\rho^2 + \frac{u}{\delta^4}\right) d\rho}{\rho\sqrt{-(\rho^2 + r_1)(\rho^2 + r_2)(\rho^2 + r_3)}},$$

et, comme $r_1 + \rho^2$ augmente continuement de $r_1 - r_3$ à $r_1 - r_2$ quand, pour une valeur fixe de δ, on fait augmenter ρ de ρ_3 à ρ_2, cet angle a encore deux limites :

Limite supérieure :

$$\begin{aligned} L_3 &= \frac{\delta}{\sqrt{r_1 - r_3}} \int_{\rho_3}^{\rho_2} \frac{\left(\rho^2 + \frac{u}{\delta^4}\right) d\rho}{\rho\sqrt{-(\rho^2 + r_2)(\rho^2 + r_3)}} \\ &= \frac{\delta}{\sqrt{r_1 - r_3}}\left(1 + \frac{u}{\delta^4\sqrt{r_2 r_3}}\right)\frac{\pi}{2}; \end{aligned}$$

Limite inférieure :

$$L_2 = \frac{\delta}{\sqrt{r_1 - r_2}}\left(1 + \frac{u}{\delta^4\sqrt{r_2 r_3}}\right)\frac{\pi}{2}.$$

La valeur initiale de cette dernière est

$$\frac{b^2}{\sqrt{(a^2 - b^2)(b^2 - c^2)}}\,\frac{\pi}{2}.$$

La valeur finale est

$$\frac{a^2 + \sqrt{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)}}{\sqrt{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)}}\,\frac{\pi}{2},$$

quantité $> \frac{\pi}{2}$.

Du reste, pour les valeurs de δ qui avoisinent b, Ω_2^3 a une valeur absolue très grande, et, comme on a

$$\frac{dL_2}{d\delta} = \frac{\delta}{(\delta^2 - b^2)^{\frac{1}{2}}(\delta^2 - c^2)^{\frac{3}{2}}}\left[(\delta^2 - 2c^2)\sqrt{\delta^2 - b^2} + (\delta^2 - c^2)^{\frac{3}{2}}\right],$$

quantité toujours positive quand δ croît de b à a, la limite inférieure L_2 ne cesse d'augmenter, et, par suite, Ω_2^3 est, en général, plus grand que $\frac{\pi}{2}$. La forme de la courbe demeure sensiblement celle de la *fig.* 1. Enfin, pour $\delta = a$, la polhodie se réduit au sommet du grand axe, et l'herpolhodie au point P.

III. — Mouvement sur l'herpolhodie.

Pour achever la question, il reste à étudier la vitesse du roulement des deux courbes l'une sur l'autre. Si l'on se reporte aux équations d'Euler et à l'analyse de Poinsot, on voit que les coordonnées x, y, z du point de contact des deux courbes par rapport aux axes de l'ellipsoïde sont

$$x = \frac{p}{\sqrt{H}}, \quad y = \frac{q}{\sqrt{H}}, \quad z = \frac{r}{\sqrt{H}},$$

p, q, r, H ayant les désignations que l'on sait, et que, par conséquent, la première des équations du mouvement peut s'écrire

$$(8) \qquad \frac{1}{a^2}\frac{dx}{dt} + \left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{b^2}\right) yz\sqrt{H} = 0;$$

d'où, en tenant compte des équations (4′) et en choisissant convenablement les signes des radicaux,

$$(9) \qquad \frac{d\rho}{dt} = \frac{\sqrt{H}}{\rho}\sqrt{-(\rho^2 + r_1)(\rho^2 + r_2)(\rho^2 + r_3)};$$

de là résulte aussi

$$\frac{d\omega}{dt} = \delta\sqrt{H}\left(1 + \frac{u}{\rho^2\delta^4}\right); \tag{10}$$

la vitesse du point coïncidant sur la courbe fixe est donc

$$\left\{\begin{aligned} v^2 &= \frac{H}{\rho^2}\left[-(\rho^2+r_1)(\rho^2+r_2)(\rho^2+r_3)+\delta^2\left(\rho^2+\frac{u}{\delta^4}\right)^2\right] \\ &= -\frac{H}{\rho^2}\Big[\alpha(\rho^2+r_2)(\rho^2+r_3) \\ &\qquad +\beta(\rho^2+r_3)(\rho^2+r_1)+\gamma(\rho^2+r_1)(\rho^2+r_2)\Big]. \end{aligned}\right. \tag{11}$$

Si l'on se reporte à la *fig.* 1, en y suivant le mouvement continu du point coïncidant de M_1 en M_2, $\frac{d\omega}{dt}$ diminue constamment de $\delta\sqrt{H}\left(1+\frac{u}{\rho_1^2\delta^4}\right)$ à $\delta\sqrt{H}\left(1+\frac{u}{\rho_2^2\delta^4}\right)$, puis augmente de nouveau en oscillant périodiquement entre ces limites; ω augmente et diminue plus vite au voisinage du cercle C_1 qu'au voisinage du cercle C_2.

En dérivant, par rapport à ρ, les deux membres de l'équation (11), on a

$$\begin{aligned} \frac{dv^2}{d\rho} &= H\,\frac{\left\{\begin{aligned} &\rho^2\left\{\begin{aligned} &-2\rho[3\rho^4+2(r_1+r_2+r_3)\rho^2+r_1r_2+r_2r_3+r_3r_1] \\ &\qquad +4\delta^2\rho\left(\rho^2+\frac{u}{\delta^4}\right)\end{aligned}\right\} \\ &\quad -2\rho\left[-(\rho^2+r_1)(\rho^2+r_2)(\rho^2+r_3)+\delta^2\left(\rho^2+\frac{u}{\delta^4}\right)^2\right]\end{aligned}\right\}}{\rho^4} \\ &= 2H\,\frac{-2\rho^6-(r_1+r_2+r_3-\delta^2)\rho^4+r_1r_2r_3-\dfrac{u^2}{\delta^6}}{\rho^3}; \end{aligned}$$

mais on a vu que $r_1r_2r_3 = \frac{u^2}{\delta^6}$; donc

$$\frac{dv^2}{d\rho} = -2H\rho[2\rho^2-(r_1+r_2+r_3-\delta^2)].$$

Pour $\rho = \rho_1$,

$$\frac{dv^2}{d\rho} = -2H\rho_1(-r_1 + r_2 + r_3 - \delta^2);$$

pour $\rho = \rho_2$,

$$\frac{dv^2}{d\rho} = -2H\rho_2(r_1 - r_2 + r_3 - \delta^2);$$

mais

$$\begin{aligned} & r_1 + r_2 + r_3 - \delta^2 \\ &= \frac{(\delta^2 - a^2)(\delta^2 - b^2) + (\delta^2 - b^2)(\delta^2 - c^2) + (\delta^2 - c^2)(\delta^2 - a^2) - \delta^4}{\delta^2} \\ &= \frac{2\delta^4 - 2(a^2 + b^2 + c^2)\delta^2 + a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}{\delta^2}. \end{aligned}$$

Le numérateur de cette fraction a deux racines réelles, l'une toujours $> a^2$.

1° Si $c^2 \geq \dfrac{a^2b^2}{a^2+b^2}$, l'autre racine qui est positive est moindre que c^2. Dans ce cas, $r_1 + r_2 + r_3 - \delta^2$ est toujours négatif quand δ varie de c à b; $\dfrac{dv^2}{d\rho}$ s'annule, par conséquent, et change de signe pour une certaine valeur de ρ; mais, dans ce cas, $r_3 - \delta^2 < 0$ et $r_2 - r_1 < 0$: donc la valeur initiale de $\dfrac{dv^2}{d\rho}$ est positive; par conséquent, la vitesse du point coïncident augmente à partir du point M_1; mais, suivant les cas, entre M_1 et M_2, elle peut croître continuement ou atteindre un maximum.

2° Si $c^2 < \dfrac{a^2b^2}{a^2+b^2}$, la deuxième racine est supérieure à c^2; mais alors, à plus forte raison, $b^2 > \dfrac{a^2c^2}{a^2+c^2}$, et cette même racine est inférieure à b^2. Désignons-la par δ_1^2.

Quand δ varie de c à δ_1, $r_1 + r_2 + r_3 - \delta^2$ est positif : donc $\dfrac{dv^2}{d\rho}$ commence par être négatif, et, par conséquent.

ν^2 commence par diminuer et diminue sans cesse de M_1 à M_2.

Si $\delta = \delta_1$, $\frac{d\nu^2}{d\rho}$ est encore négatif, et ν diminue constamment.

Enfin, quand δ s'élève au-dessus de δ_1, $r_1 + r_2 + r_3 - \delta^2$ devient négatif, et ν^2 commence par augmenter à partir de M_1 comme dans la première circonstance.

L'équation (9) donne

$$dt = \frac{1}{\sqrt{H}} \frac{\rho\, d\rho}{\sqrt{-(\rho^2 + r_1)(\rho^2 + r_2)(\rho^2 + r_3)}},$$

donc le temps T_1^2 employé à décrire l'arc $M_1 M_2$ est

$$T_1^2 = \frac{1}{\sqrt{H}} \int_{\rho_1}^{\rho_2} \frac{\rho\, d\rho}{\sqrt{-(\rho^2 + r_1)(\rho^2 + r_2)(\rho^2 + r_3)}};$$

il est aussi compris entre les deux limites

Limite supérieure...... $\frac{\delta}{\sqrt{H}} \frac{\pi}{2\sqrt{(a^2 - c^2)(b^2 - \delta^2)}}$,

Limite inférieure...... $\frac{\delta}{\sqrt{H}} \frac{\pi}{2\sqrt{(b^2 - c^2)(a^2 - \delta^2)}}$.

Les arcs symétriques μM_2, $M_2 \mu'$ sont décrits dans le même temps, et, par conséquent, aux points μ, μ' les vitesses sont égales, symétriques l'une de l'autre par rapport à l'axe PM_2, mais orientées inversement.

Mêmes conclusions quand δ varie de b à c.

Enfin, pour $\delta = b$, on a

$$\omega = \delta\sqrt{H}\, t,$$

$$\rho = \frac{2\rho_2}{e^{\rho_2\sqrt{H}\,t} + e^{-\rho_2\sqrt{H}\,t}};$$

l'angle ω croît proportionnellement au temps, et le mouvement, qui tend, comme on l'a démontré plus haut, à renverser complètement le corps, demande un temps infini pour s'achever. On a alors

$$v^2 = \mathrm{H}\rho^2(b^2 + \rho_2^2 - \rho^2) = \mathrm{H}\rho^2\left[\frac{(a^2+c^2)b^2 - a^2c^2}{b^2} - \rho^2\right];$$

donc, pour $\rho = \rho_2$,

$$v = b\rho_2\sqrt{\mathrm{H}};$$

à partir de cette valeur, v diminue continuement si $b^2 \geq \rho_2^2$ et atteint, au bout d'un temps infini, sa valeur finale o. Le mouvement se ralentit à mesure que l'axe instantané se rapproche de $o\mathrm{P}$.

Si $b^2 < \rho_2^2$, la vitesse augmente jusqu'à ce que

$$\rho^2 = \frac{b^2 + \rho_2^2}{2}$$

et atteint, à ce moment, le maximum donné par

$$v^2 = \mathrm{H}\frac{(b^2 + \rho_2^2)^2}{4},$$

puis diminue constamment jusqu'à zéro.