NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

X. ANTOMARI

Théorèmes de géométrie sur le centre des moyennes distances

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 4 (1885), p. 98-100

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1885_3_4__98_1>

THÉORÈMES DE GÉOMÉTRIE SUR LE CENTRE DES MOYENNES DISTANCES;

PAR M. X. ANTOMARI,
Professeur de Mathématiques spéciales au lycée de Rennes.

Définition. — Étant donné un système de m points $A_1, A_2, \ldots, A_m$ affectés respectivement des coefficients

$a_1, a_2, \ldots, a_m$, nous appellerons composition de ces m points l'opération qui consiste à chercher leur centre des distances proportionnelles.

THÉORÈME I. — *Soit un système de m points affectés respectivement du coefficient 1. On les combine p à p de toutes les manières possibles et l'on compose les p points de chaque combinaison; on obtient ainsi un système (a) de $C_{m,p}$ points. A toute combinaison p à p correspond une combinaison $m - p$ à $m - p$; on compose les $m - p$ points de chacune de ces combinaisons, ce qui donne un nouveau système (b) de $C_{m,m-p}$ points. Les deux systèmes (a) et (b) sont homothétiques par rapport au centre des moyennes distances des m points donnés, et le rapport d'homothétie est égal à $\frac{m-p}{p}$.*

Soit en effet O_1 le centre des moyennes distances d'une combinaison des m points p à p, et soit O_2 le centre des moyennes distances des $m - p$ points restants. Si l'on affecte O_1 du coefficient p, O_2 du coefficient $m - p$ et que l'on compose ces deux points, on obtient le centre des moyennes distances des m points donnés. C'est le point G de la droite O_1O_2, tel que l'on ait

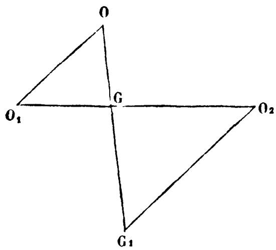
$$\frac{O_1G}{GO_2} = \frac{m-p}{p}.$$

Les points O_1 et O_2 sont donc deux points homologues de deux systèmes homothétiques inverses par rapport au point G, et le rapport d'homothétie est égal à $\frac{m-p}{p}$.

THÉORÈME II. — *Soient O_1 et O_2 deux points homologues obtenus comme dans le théorème I. On joint un* *point fixe O aux points tels que O_1 et l'on mène par les points homologues O_2 les parallèles à ces droites. Toutes ces parallèles concourent au même point.*

La proposition résulte de ce que O_1 et O_2 sont deux points homologues de deux systèmes homothétiques. Nous allons l'établir directement, de sorte que la proposition correspondante des systèmes homothétiques en résultera.

Composons en effet les trois points O_1, O_2, O affectés respectivement des coefficients p, $m-p$ et $(-p)$. En



composant d'abord O avec O_1, on voit que le centre des distances proportionnelles se trouve sur la parallèle à OO_1 menée par O_2. Composant ensuite O_1 avec O_2, on obtient le centre des moyennes distances des m points donnés; soit G ce point. Le centre des distances proportionnelles des trois points O, O_1, O_2 sera un point G_1 de OG, tel que l'on ait

$$\frac{OG_1}{G_1G} = \frac{m-p}{p}.$$

Donc le point G_1 est un point fixe.