NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

M. DU CHATENET

Sur la représentation des figures tracées sur une surface. Applications aux cartes de géographie

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 5 (1886), p. 142-155

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1886_3_5__142_1>

SUR LA REPRÉSENTATION DES FIGURES TRACÉES SUR UNE SURFACE. APPLICATIONS AUX CARTES DE GÉOGRAPHIE;

PAR M. M. DU CHATENET.

Étant donnée une figure tracée sur une surface, on peut, d'une infinité de manières différentes, obtenir une figure qui sera sa représentation ou sa transformée située sur une autre surface. Il suffira pour cela de se donner deux relations entre les coordonnées d'un point sur chacune des deux surfaces.

Soient p et q les coordonnées quelconques d'une courbe située sur une surface donnée, u et v les coordonnées de sa transformée sur une autre surface. Tout système de deux relations

$$F(p, q, u, v) = 0,$$
$$F_1(p, q, u, v) = 0$$

déterminera un mode de transformation.

On peut donc se proposer de définir les fonctions caractéristiques F et F_1, de telle sorte que le système de transformation qui en résultera jouisse de telle propriété qu'on voudra lui imposer.

Notons que tous les problèmes que l'on peut se proposer sur la construction des cartes de géographie ne sont que des cas particuliers de la question que nous venons d'énoncer, puisque les surfaces considérées seront, d'une part, la sphère terrestre et, de l'autre, un plan, celui de la carte.

Nous examinerons et chercherons à définir un mode de transformation par la condition suivante. Soit une famille de courbes tracées sur une surface et représentées par l'équation

$$\mu\varphi + \nu\psi = 1, \tag{1}$$

dans laquelle μ et ν sont des constantes, φ et ψ des fonctions quelconques de u et v. Nous voulons que les lignes définies par l'équation (1) aient sur la seconde surface une transformée définie par l'équation

$$mu + nv = 1, \tag{2}$$

dans laquelle m et n sont des constantes.

En d'autres termes, nous déterminerons une transformation telle que toute famille de courbes de la première surface définie par une équation linéaire entre deux fonctions de ses coordonnées soit représentée sur la deuxième surface par une équation linéaire entre les coordonnées.

Pour résoudre ce problème, il suffira de fixer la forme des fonctions φ et ψ.

Formons l'équation différentielle de cette famille de courbes, nous différentierons deux fois (1) en considérant v comme variable indépendante et éliminerons μ et ν entre les deux équations obtenues et l'équation (1). Nous arriverons ainsi à l'équation

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} &\left(\frac{d\varphi}{dv} + \frac{d\varphi}{du}\frac{du}{dv}\right)\left[\frac{d^2\psi}{dv^2} + 2\frac{d^2\psi}{du\,dv}\frac{du}{dv} + \frac{d^2\psi}{du^2}\left(\frac{du}{dv}\right)^2 + \frac{d\psi}{du}\frac{d^2u}{dv^2}\right] \\ &\quad = \left(\frac{d\psi}{dv} + \frac{d\psi}{du}\frac{du}{dv}\right)\left[\frac{d^2\varphi}{dv^2} + 2\frac{d^2\varphi}{du\,dv}\frac{du}{dv} + \frac{d^2\psi}{du^2}\left(\frac{du}{dv}\right)^2 + \frac{d\varphi}{du}\frac{d^2u}{dv^2}\right],\end{aligned}\right.$$

qui n'est autre chose que l'équation différentielle des lignes (1) transformées.

Or, puisque cette transformée doit être représentée par une équation linéaire entre u et v, la relation (3) ne doit pas différer de $\dfrac{d^2 u}{dv^2} = 0$.

Les coefficients de $\left(\dfrac{du}{dv}\right)^3$, $\left(\dfrac{du}{dv}\right)^2$, $\left(\dfrac{du}{dv}\right)^1$, $\left(\dfrac{du}{dv}\right)^0$ devront donc être nuls, ce qui fournit les quatre relations suivantes :

$$\frac{d\varphi}{du}\,\frac{d^2\psi}{du^2} - \frac{d\psi}{du}\,\frac{d^2\varphi}{du^2} = 0, \tag{4}$$

$$\frac{d\varphi}{dv}\,\frac{d^2\psi}{dv^2} - \frac{d\psi}{dv}\,\frac{d^2\varphi}{dv^2} = 0, \tag{5}$$

$$\left\{\begin{aligned} &2\frac{d\varphi}{du}\,\frac{d^2\psi}{du\,dv} - 2\frac{d\psi}{du}\,\frac{d^2\varphi}{du\,dv} \\ &\qquad + \frac{d\varphi}{dv}\,\frac{d^2\psi}{du^2} - \frac{d\psi}{dv}\,\frac{d^2\varphi}{du^2} = 0. \end{aligned}\right. \tag{6}$$

$$\left\{\begin{aligned} &2\frac{d\varphi}{dv}\,\frac{d^2\psi}{du\,dv} - 2\frac{d\psi}{dv}\,\frac{d^2\varphi}{du\,dv} \\ &\qquad + \frac{d\varphi}{du}\,\frac{d^2\psi}{dv^2} - \frac{d\psi}{du}\,\frac{d^2\varphi}{dv^2} = 0. \end{aligned}\right. \tag{7}$$

L'équation (4) ne contenant que des dérivées par rapport à u, donne immédiatement pour solution

$$\psi = \varphi\, f(v) + F(v), \tag{8}$$

f et F étant des fonctions quelconques de v, mais indépendantes de u.

De (8) nous déduisons

$$\left\{\begin{aligned} \frac{d\psi}{du} &= f\,\frac{d\varphi}{du}, \\ \frac{d^2\psi}{du^2} &= f\,\frac{d^2\varphi}{du^2}, \\ \frac{d\psi}{dv} &= f\,\frac{d\varphi}{dv} + \varphi\,\frac{df}{dv} + \frac{dF}{dv}, \\ \frac{d^2\psi}{dv^2} &= f\,\frac{d^2\varphi}{dv^2} + \varphi\,\frac{d^2 f}{dv^2} + 2\,\frac{d\varphi}{dv}\,\frac{df}{dv} + \frac{d^2 F}{dv^2}, \\ \frac{d^2\psi}{du\,dv} &= f\,\frac{d^2\varphi}{du\,dv} + \frac{d\varphi}{du}\,\frac{df}{dv}. \end{aligned}\right. \tag{9}$$

En portant ces valeurs dans (5), (6), (7) de manière à éliminer ψ, nous obtiendrons

$$(10)\quad \frac{d\varphi}{dv}\left(\varphi\frac{d^2f}{dv^2}+2\frac{d\varphi}{dv}\frac{df}{dv}+\frac{d^2F}{dv^2}\right)-\frac{d^2\varphi}{dv^2}\left(\varphi\frac{df}{dv}+\frac{dF}{dv}\right)=0,$$

$$(11)\quad 2\frac{df}{dv}\left(\frac{d\varphi}{du}\right)^2-\frac{d^2\varphi}{du^2}\left(\varphi\frac{df}{dv}+\frac{dF}{dv}\right)=0,$$

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned}&\frac{d\varphi}{du}\left(\varphi\frac{d^2f}{dv^2}+4\frac{d\varphi}{dv}\frac{df}{dv}+\frac{d^2F}{dv^2}\right)\\&\qquad-2\frac{d^2\varphi}{du\,dv}\left(\varphi\frac{df}{dv}+\frac{dF}{dv}\right)=0.\end{aligned}\right.$$

Dans (11), les dérivées de φ ne sont prises que par rapport à u; on peut facilement intégrer cette équation, ce qui donne

$$(13)\quad \varphi\frac{df}{dv}+\frac{dF}{dv}=\frac{M}{u+N},$$

où M et N sont des fonctions quelconques de v, mais indépendantes de u.

De (13) on peut déduire par dérivation les valeurs de $\frac{d\varphi}{dv}$, $\frac{d^2\varphi}{du\,dv}$, $\frac{d\varphi}{du}$. En portant ces valeurs dans (12), on aura

$$(14)\quad \left\{\begin{aligned}&3\left(\frac{dF}{dv}\frac{d^2f}{dv^2}-\frac{df}{dv}\frac{d^2F}{dv^2}\right)(u+N)\\&\qquad+2\frac{df}{dv}\frac{dM}{dv}-M\frac{d^2f}{dv^2}=0.\end{aligned}\right.$$

Puisque les fonctions F, f, M, N ne contiennent pas u, il faut, pour que la relation (14) puisse être vérifiée, avoir séparément

$$(15)\quad \frac{dF}{dv}\frac{d^2f}{dv^2}-\frac{df}{dv}\frac{d^2F}{dv^2}=0,$$

$$(16)\quad 2\frac{df}{dv}\frac{dM}{dv}-M\frac{d^2f}{dv^2}=0.$$

Ces deux équations s'intègrent facilement. L'équation (15) montre que les fonctions f et F sont liées entre elles par une relation linéaire. L'équation (16) a pour solution

$$\frac{df}{dv} = \mathrm{K}\mathrm{M}^2, \tag{17}$$

K étant une constante quelconque.

Posons cette valeur de $\frac{df}{dv}$ dans l'expression de $\frac{d\varphi}{dv}$ fournie par (13) : elle deviendra

$$\frac{d\varphi}{dv} = -\frac{\mathrm{M}\dfrac{d\mathrm{N}}{dv} + (u+\mathrm{N})\dfrac{d\mathrm{M}}{dv}}{\mathrm{K}\mathrm{M}^2(u+\mathrm{N})^2}; \tag{18}$$

d'où l'on tire par dérivation

$$\frac{d^2\varphi}{dv^2} = \frac{\left\{\begin{array}{l} 2\left[\mathrm{M}\dfrac{d\mathrm{N}}{dv} + (u+\mathrm{N})\dfrac{d\mathrm{M}}{dv}\right]^2 \\ \quad - \mathrm{M}(u+\mathrm{N})\left[\mathrm{M}\dfrac{d^2\mathrm{N}}{dv^2} + (u+\mathrm{N})\dfrac{d^2\mathrm{M}}{dv^2} + 2\dfrac{d\mathrm{M}}{dv}\dfrac{d\mathrm{N}}{dv}\right] \end{array}\right\}}{\mathrm{K}\mathrm{M}^3(u+\mathrm{N})^3}. \tag{19}$$

Portons enfin ces valeurs (18) et (19) dans (20), dont nous n'avons pas encore fait usage. Elle donnera, après cette substitution,

$$\left[2\left(\frac{d\mathrm{M}}{dv}\right)^2 - \mathrm{M}\frac{d^2\mathrm{M}}{dv^2}\right](u+\mathrm{N}) - \mathrm{M}^2\frac{d^2\mathrm{N}}{dv^2} = 0. \tag{20}$$

Puisque M et N sont des fonctions indépendantes de u, on devra avoir, pour que cette relation puisse être vérifiée,

$$2\left(\frac{d\mathrm{M}}{dv}\right)^2 - \mathrm{M}\frac{d^2\mathrm{M}}{dv^2} = 0, \tag{21}$$

$$\frac{d^2\mathrm{N}}{dv^2} = 0. \tag{22}$$

On voit, d'après (22), que N doit être une fonction linéaire de v, et l'intégration de (9) donne

$$\mathrm{M} = \frac{1}{hv+g}, \tag{23}$$

h et g étant des constantes.

En substituant cette valeur de M dans (17), nous aurons par l'intégration

$$f = \frac{n}{hv + g} + r$$

et, comme F est fonction linéaire de f,

$$\mathrm{F} = \frac{s}{hv + g} + t.$$

Nous avons ainsi calculé tous les éléments de la valeur de φ et ψ. Il suffirait du reste de connaître une de ces fonctions pour en déduire l'autre, en vertu de la symétrie des équations.

Les fonctions φ et ψ qu'il s'agissait de déterminer auront donc les formes suivantes :

$$(24) \qquad \varphi = \frac{au + bv + p}{mu + nv - q},$$

$$(25) \qquad \psi = \frac{a'u - b'v - p'}{mu + nv + q}.$$

En substituant ces valeurs dans (1), nous voyons que la famille de courbes considérées aura pour correspondante sur l'autre surface celle définie par l'équation

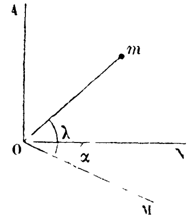
$$\mu(au + bv + p) + v(a'u + b'v + p') = mu + nv + q.$$

Nous examinerons quelques conséquences de l'analyse précédente en choisissant la nature des fonctions φ et ψ, celle des coordonnées u et v, et celle des deux surfaces considérées.

I.

Sans rien supposer sur la nature de la surface contenant les courbes que l'on veut transformer, nous définirons la position d'un point sur cette surface au moyen d'un axe quelconque OA et d'un plan OMN perpendiculaire à OA. Nous appellerons *longitude* et désignerons par α l'angle du plan passant par l'axe OA et le point m considéré avec un plan origine AON; nous appellerons

Fig. 1.



latitude et désignerons par λ l'angle du rayon vecteur Om avec le plan OMN.

Examinons la famille de courbes définie par l'équation suivante

$$(26) \qquad \cot\lambda(\mathrm{A}\cos\alpha - \mathrm{B}\sin\alpha) = 1,$$

et étudions la transformation d'après laquelle les courbes (26) sont représentées sur un plan par des droites.

Remarquons dès maintenant que, dans le cas particulier où la surface considérée est la sphère terrestre, si nous prenons pour axe OA la ligne des pôles et pour plan OMN celui de l'équateur, α et λ ne seront autre chose que la longitude et la latitude géographiques d'un point, et l'équation (26) sera l'équation générale des grands cercles de la sphère. Dans ce cas, la question que nous nous sommes proposée pourra donc se formuler de la manière suivante : Trouver tous les systèmes de cartes de géographie dans lesquels les grands cercles de la sphère sont représentés par des droites.

Il suffira, pour avoir la solution du problème général, de faire dans les formules (24) et (25)

$$\varphi = \cos\alpha\cot\lambda, \qquad \psi = \sin\alpha\cot\lambda, \qquad u = x, \qquad v = y,$$

et nous aurons ainsi

$$(27)\quad \begin{cases} \cos\alpha \cot\lambda = \dfrac{ax + by + p}{mx + ny + q}, \\ \sin\alpha \cot\lambda = \dfrac{a'x + b'y + p'}{mx + ny + q}. \end{cases}$$

On déduit facilement de ces formules les équations des transformées des courbes de longitude et de latitude

$$(28)\quad \operatorname{tang}\alpha = \frac{a'x + b'y + p'}{ax + by + p},$$

$$(29)\quad \begin{cases} (mx + ny + q)^2 \cot^2\lambda \\ \quad = (ax + by + p)^2 + (a'x + b'y + p')^2. \end{cases}$$

Prenons dans le plan pour origine des coordonnées le point représentant l'une des intersections de l'axe OA avec la surface (l'un des pôles terrestres dans le cas de la sphère). Il est évident que la courbe de longitude devra être représentée sur le plan par une droite issue de l'origine; par conséquent, d'après (28), nous devons avoir $p = 0$, $p' = 0$, et les équations (28) et (29) deviendront

$$(30)\quad \operatorname{tang}\alpha\ \frac{a'x + b'y}{ax + by},$$

$$(31)\quad \begin{cases} (mx + ny + q)\cot^2\lambda \\ \quad = (ax + by)^2 + (a'x + b'y)^2; \end{cases}$$

d'où l'on voit que les courbes de latitude ont toujours des coniques pour transformées.

Le canevas de cette transformation sera donc formé par un système de droites concourantes et de courbes du second degré.

La condition qui détermine la nature des coniques est la suivante :

$$(32)\quad \begin{cases} [(an - mb)^2 + (a'n - mb')^2]\cot^2\lambda \\ \qquad - (ab' - ba')^2 \end{cases} \begin{cases} > 0 & \text{hyperbole,} \\ = & \text{parabole,} \\ < 0 & \text{ellipse.} \end{cases}$$

Les diverses courbes de latitude seront généralement représentées par les trois coniques suivant la valeur de λ. On peut démontrer que toutes ces coniques ont leur centre sur une même droite dont l'équation est

$$(33)\qquad (an - bm)(ax + by) + (a'n - b'm)(a'x + b'y) = 0.$$

La condition (32) montre que, lorsqu'on a $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$, les courbes de latitude sont toujours figurées par des hyperboles; ce réseau ne sera jamais formé uniquement d'hyperboles équilatères.

La même condition (32) montre encore que, dans le cas où $m = n = 0$, on aura uniquement des ellipses homothétiques et concentriques.

On voit aussi que, lorsque $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{m}{n}$, on a uniquement des paraboles ayant le même axe.

L'équation générale (31) montre que les termes du deuxième degré ne peuvent disparaître pour toute valeur de λ; les courbes de latitude ne pourront donc jamais être figurées par un réseau de droites.

Cherchons donc, ce qui serait d'un grand avantage pour le tracé d'un canevas géographique, si elles peuvent être toutes représentées par des cercles, c'est-à-dire par la courbe la plus simple après la droite.

Pour que l'équation (31) donne un cercle pour toute valeur de λ, il faut que les conditions suivantes soient vérifiées :

$$m = n = 0, \qquad ab + a'b' = 0, \qquad a^2 + a'^2 = b^2 + b'^2,$$

et alors l'équation se réduit à

$$(34)\qquad (a^2 + a'^2)(x^2 + y^2) = q^2 \cot^2 \lambda.$$

Ainsi, quand les courbes de latitude sont toutes représentées par des cercles, ces cercles ont pour centre commun le point correspondant à l'une des intersections de la surface avec l'axe choisi et un rayon proportionnel à la cotangente de la latitude.

Des conditions nécessaires pour obtenir des cercles, on déduit $b = \pm a'$, $b' = \mp a$; en portant ces valeurs dans (30), on aura l'équation des droites de longitude

$$(35) \qquad \operatorname{tang} \alpha = \frac{a'x \mp ay}{ax \pm a'y}.$$

Si nous posons $\frac{a'}{a} = \operatorname{tang}\theta$ et $\frac{y}{x} = \operatorname{tang}\nu$, nous aurons

$$\nu = \theta \pm \alpha.$$

Les lignes de longitude feront donc entre elles sur le plan les mêmes angles que sur la surface.

On peut donc dans le cas des cartes de géographie, en tenant compte de la forme des relations (34) et (35), énoncer la proposition suivante :

La projection centrale, c'est-à-dire la perspective obtenue du centre de la sphère en projetant sur un plan perpendiculaire à la ligne des pôles, est le seul système de cartes dans lequel les grands cercles sont représentés par des droites et les parallèles par des cercles.

Il est un cas qui a échappé à l'analyse précédente, puisque nous avons pris pour origine le point de concours des droites de longitude : c'est celui où ces droites seraient parallèles. Nous pourrons alors prendre pour axes des x une perpendiculaire à leur direction commune. D'après (28), nous devrons avoir $b' = 0$, $b = 0$, et, en plaçant convenablement l'origine, nous pourrons, sans nuire à la généralité, supposer que $q = 0$, $p' = 0$.

Les équations des lignes formant le canevas deviennent

$$(36) \qquad \tang \alpha = \frac{a' r}{ax + p},$$

$$(37) \qquad (mx - ny)^2 \cot^2 \lambda = (ax - p)^2 - a'^2 r^2.$$

Les transformées des lignes de latitude seront toujours des hyperboles.

Comme cas particulier des équations (36) et (37), on trouve, quand il s'agit de la sphère, le cas de la projection centrale sur un plan perpendiculaire à l'équateur. On voit donc que, dans tout système de cartes où les grands cercles sont figurés par des droites et les méridiens par des droites parallèles, les cercles de latitude le seront par des hyperboles.

II.

Employant les mêmes coordonnées α et λ que précédemment, considérons la famille de courbes tracées sur une même surface et données par l'équation

$$(38) \qquad \mathrm{A}\alpha + \mathrm{B}\, l \tang \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \lambda\right) = 1.$$

Cherchons un mode de transformation tel que ces courbes soient représentées sur un plan par des droites.

Dans le cas où la surface donnée sera la sphère terrestre, l'équation (38) sera celle des loxodromies, c'est-à-dire des courbes coupant tous les méridiens sous un angle constant, et alors le problème pourra s'énoncer comme il suit :

Trouver tous les système de cartes dans lesquels les loxodromies sont figurées par des droites.

Il suffira pour résoudre la question de faire, dans les formules (24) et (25),

$$\varphi = \alpha, \qquad \psi = l \tang \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \lambda\right), \qquad u = x, \qquad v = y,$$

et nous obtiendrons ainsi

$$(39) \qquad \alpha = \frac{ax - by - p}{mx + ny + q},$$

$$(40) \qquad l \tang \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \lambda\right) = \frac{a'x + b'y + p'}{mx + ny + q}.$$

Ces deux équations donnent les transformées des courbes de longitude et de latitude. Or sur la surface les courbes de latitude ne se coupent jamais, puisqu'elles se trouvent sur différents cônes de révolution ayant le même axe et le même sommet. Les transformées de ces lignes qui sont des droites, d'après (40), devront être parallèles. Nous prendrons sur le plan l'axe des x parallèle à cette direction commune. On aura donc $a' = 0$, $m = 0$.

L'équation (39) donne les droites de longitude. Or sur la surface les lignes de longitude passent toutes par l'intersection de l'axe OA avec la surface. Les droites qui sont leurs transformées sur le plan devront donc toutes avoir un point commun. Nous prendrons ce point pour origine, et alors on doit avoir $p = 0$, $q = 0$.

Les équations des deux systèmes de courbes formant le canevas seront donc

$$(41) \qquad \alpha = \frac{ax + by}{ny}, \qquad l \tang \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \lambda\right) = \frac{b'y + p'}{ny}.$$

Si l'on veut imposer cette condition que les droites de longitude soient parallèles entre elles, il faudra que $n = 0$, et, en disposant de la position de l'origine pour faire $p = 0$ et $p' = 0$, les équations du canevas seront

$$(42) \qquad \alpha = \frac{ax + by}{q}, \qquad l \tang \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \lambda\right) = \frac{b'y}{q}.$$

Lorsque $b = 0$, les deux systèmes de droites sont rectangulaires, ce qui correspond à la carte marine ou projection de Mércator.

III.

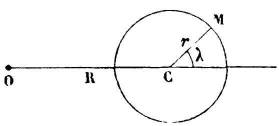
Nous pouvons appliquer la même méthode pour la résolution du problème suivant :

Étant donné un tore circulaire, trouver tous les modes de transformation permettant de représenter sur un plan les figures tracées sur cette surface, avec la condition que les sections centrales du tore soient transformées suivant des droites.

C'est le problème que pourraient se poser les habitants de Saturne pour construire la carte de leur pays.

Prenons pour coordonnées trois axes rectangulaires, l'origine étant placée au centre du tore et le plan des XY

Fig. 2.



coïncidant avec celui de l'équateur. Soient α la longitude d'un point M du tore, telle que nous l'avons entendue, et λ sa latitude, en appelant latitude l'angle du rayon vecteur MC allant au centre du cercle générateur et de la droite OC joignant le point C au centre du tore. On voit facilement que l'on aura

$$X = (R + r\cos\lambda)\cos\alpha,$$
$$Y = (R + r\cos\lambda)\sin\alpha,$$
$$Z = \sin\lambda.$$

L'équation générale des sections centrales du tore pourra donc s'écrire, au moyen de la longitude et latitude,

$$(43)\qquad \mathrm{A}\,\frac{\mathrm{R}+r\cos\lambda}{r\sin\lambda}\cos\alpha+\mathrm{B}\,\frac{\mathrm{R}+r\cos\lambda}{r\sin\lambda}\sin\alpha=1.$$

Elle est donc du même type que (1), et nous n'avons, pour résoudre la question, qu'à appliquer les formules (24) et (25), ce qui donnera

$$(44)\qquad \left\{\begin{aligned}\frac{\mathrm{R}+r\cos\lambda}{r\sin\lambda}\cos\alpha&=\frac{ax+by+p}{mx+ny+q},\\ \frac{\mathrm{R}+r\cos\lambda}{r\sin\lambda}\sin\alpha&=\frac{a'x+b'y+p'}{mx+ny+q}.\end{aligned}\right.$$

Les transformées des lignes de longitude et de latitude formant le canevas auront pour équations

$$(45)\qquad \operatorname{tang}\alpha=\frac{a'x+b'y+p'}{ax+by+p},$$

$$(46)\qquad \left(\frac{\mathrm{R}+r\cos\lambda}{r\sin\lambda}\right)^2=\frac{(ax+by+p)^2+(a'x+b'y+p')^2}{(mx+ny+q)^2}.$$

Ces relations sont tout à fait analogues à celles que nous avons obtenues (28) et (29), en traitant un problème précédent. Elles n'en diffèrent que par le changement de $\cot\lambda$ en $\frac{\mathrm{R}+r\cos\lambda}{r\sin\lambda}$. L'étude que nous en avons déjà faite s'applique donc au cas actuel.