NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

H. PICQUET

Construction des points doubles de la projection de la courbe d'intersection de deux cônes ou cylindres du second degré. Considérations sur le théorème de Desargues

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 5 (1886), p. 163-168

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1886_3_5__163_1>

CONSTRUCTION DES POINTS DOUBLES DE LA PROJECTION DE LA COURBE D'INTERSECTION DE DEUX CONES OU CYLINDRES DU SECOND DEGRÉ. CONSIDÉRATIONS SUR LE THÉORÈME DE DESARGUES;

PAR M. H. PICQUET.

1. Il est d'usage, dans certains Cours de Géométrie descriptive, après avoir construit la droite qui joint les points doubles de la projection de la courbe d'intersection de deux cônes ou cylindres du second degré, de ne pas achever la détermination de ces points, sous prétexte que la construction à intervenir ne serait ni simple, ni utile. Si, cependant, on peut affirmer d'un côté que, dans la résolution d'un problème graphique, les éléments qui doivent concourir à la connaissance des résultats ne sont jamais en trop grand nombre, vu qu'il est toujours loisible de négliger ceux d'entre eux qui pourraient paraître entachés d'erreur; il est évident, d'autre part, que la solution du problème énoncé ne peut atteindre un degré de complication bien élevé, puisqu'il est du second degré et n'exige, par suite, que l'usage de la règle et du compas. Il m'a donc paru intéressant de rechercher cette construction, et voici celle que je propose. Elle est entièrement fondée sur le théorème de

Desargues, généralisé par Sturm, qui est enseigné aujourd'hui dans la plupart des classes de Mathématiques spéciales, et que j'énonce ainsi pour faire voir de quelle façon j'estime que l'on doit envisager des couples de points en involution :

Toutes les coniques d'un faisceau linéaire (c'est-à-dire circonscrites à un quadrilatère dont les sommets sont réels ou imaginaires conjugués deux à deux) sont coupées par une droite suivant des couples de points conjugués harmoniques à deux points fixes, réels ou imaginaires conjugués.

Cela posé, supposons que l'on ait construit, comme d'habitude, la ligne des points doubles, et considérons le plan qui la projette. Ce plan coupe les deux surfaces suivant deux coniques ayant, par construction, deux cordes communes perpendiculaires au plan de projection et dont les pieds sur ce plan sont les points doubles cherchés. Dans le plan projetant, une droite quelconque coupe les deux coniques et ces deux cordes suivant six points en involution, qui se projettent aussi, sur la droite des points doubles, suivant six points en involution. Or ces points s'obtiennent immédiatement, si l'on considère en particulier les droites d'intersection du plan projetant avec les plans auxiliaires qui ont servi à déterminer les points de la courbe d'intersection. Ce sont précisément les couples de points d'intersection de la droite des points doubles avec les couples de génératrices fournis, respectivement dans chaque surface, par les divers plans auxiliaires. On a donc ce théorème :

Les points doubles de la projection de la courbe d'intersection de deux cônes ou cylindres du second degré sont les extrémités du segment commun à une infinité d'involutions dont l'une, quelconque, est déterminée par *les deux couples de points d'intersection de la droite qui les joint avec les deux couples de génératrices résultant de l'intersection de l'un quelconque des plans auxiliaires avec les deux surfaces.*

Le problème est donc résolu théoriquement, et la construction peut s'effectuer, comme on sait, au moyen de cinq cercles ([1]). Mais, en choisissant convenablement les plans auxiliaires, elle peut se simplifier par l'emploi de trois cercles seulement, s'il existe deux plans limites, c'est-à-dire si la trace de la droite des sommets sur le plan qui projette la ligne des points doubles n'est pas à la fois à l'intérieur des traces des deux cônes sur ce plan.

Choisissons ces plans pour plans auxiliaires : chacune des deux involutions est alors définie par deux segments dont l'un est de longueur nulle. Ses points doubles sont alors : l'un, le segment *a* réduit à zéro, et l'autre, le conjugué harmonique *b* de *a* par rapport à l'autre couple ; ce conjugué harmonique se construit immédiatement au moyen d'une parallèle à l'une des deux génératrices qui fournissent le couple dont les extrémités sont différentes, laquelle est déjà tracée sur l'épure si la surface correspondante est un cylindre. Le segment commun à deux involutions dont on connaît les points doubles s'obtient alors, comme on sait, au moyen de trois cercles. D'où la règle suivante :

Pour construire les points doubles de la projection de la courbe d'intersection de deux cônes ou cylindres du second degré, on cherchera, sur la droite qui les joint les points a, α et β situés en même temps sur les

---

([1]) Si aa', bb', cc', dd' sont les quatre couples de points fournis par deux plans auxiliaires, et A un point quelconque du plan, ces cinq cercles sont les suivants : Aaa' et Abb' qui se coupent en B, Acc' et Add' qui se coupent en C, et ABC.

génératrices auxquelles donne lieu l'un des plans limites. On tracera le conjugué harmonique b de a par rapport à α et β. On fera la même opération avec l'autre plan limite, ce qui fournira deux autres points a' et b'. Par les points a et b, on tracera un cercle quelconque; par les points a' et b', on tracera un autre cercle quelconque rencontrant le premier. L'axe radical de ces cercles coupera la droite des points doubles en leur point milieu, et le cercle décrit de ce point comme centre avec la longueur commune de la tangente menée de ce point aux deux premiers cercles passera par les points cherchés.

2. Je saisis cette occasion pour donner, à l'usage des Cours où il n'est pas question d'involution, une démonstration très simple du théorème de Desargues.

Lemme I (immédiat). — *Les polaires d'un point fixe par rapport à toutes les coniques d'un faisceau linéaire sont concourantes.*

Je passe sous silence sa démonstration qui est donnée dans tous les Cours.

Lemme II. — *Il y a, dans tout faisceau linéaire, deux coniques, réelles ou imaginaires conjuguées, tangentes à une droite donnée.*

Ceci résulte de ce que la relation qui exprime le contact d'une droite et d'une conique (équation tangentielle de la conique) est du second degré par rapport aux coefficients de la conique. Cette relation est également donnée dans tous les Cours.

Cela posé, si Q est le point de concours des polaires de P, il résulte de la définition de la polaire que la droite PQ coupe toutes les coniques du faisceau suivant des couples de points conjugués harmoniques à P et à Q.

Réciproquement, sur toute droite du plan, il existe un couple de points PQ; ce sont les points de contact de la droite avec les deux coniques du faisceau qui lui sont tangentes : car la polaire de P par rapport à l'une d'elles est la droite considérée, et par rapport à l'autre, c'est une droite passant par Q. C. Q. F. D.

Je serai heureux si je puis contribuer par ce qui précède à la vulgarisation du théorème et à son introduction dans les Cours où il ne figure pas encore. Il y mérite vraiment une place et, à mon avis, une place plus large que le théorème de Pascal, dont on peut presque dire que c'est un hasard. Non seulement le théorème de Pascal n'a point d'analogue dans la théorie des courbes et surfaces de degré supérieur; mais, quoique beaucoup d'auteurs aient essayé de construire par un théorème analogue le dixième point d'une surface du second degré dont neuf autres sont connus, je ne pense pas qu'on puisse véritablement dire qu'aucun d'eux ait réussi. Le théorème de Desargues, au contraire, puise sa raison d'être dans ce fait que les courbes auxquelles il s'applique sont les coniques d'un faisceau *linéaire*, c'est-à-dire dans la définition même du système, définition dont il n'est qu'un corollaire évident; il donne une construction relativement simple de la surface du second degré dont on connaît neuf points; il a son analogue dans tout faisceau linéaire de courbes ou de surfaces algébriques, et nul doute que l'étude des involutions de degré supérieur au second ne permette d'en déduire une construction linéaire, lorsque l'une de ces courbes ou surfaces est déterminée linéairement.

Le théorème de Pascal n'a guère d'autre application que la construction de la conique par cinq points, donnés effectivement, et ses cas particuliers. Le théorème de

Desargues fournit aussi la solution linéaire du même problème, en donnant le second point d'intersection de la courbe avec une droite passant par l'un des cinq points; en outre, il permet de construire linéairement (par points, si l'une seulement des conditions est un point) une conique assujettie à cinq conditions linéaires quelconques, dont la plus générale est, comme on sait, d'être harmoniquement circonscrite à une conique donnée. Si cette conique se réduit à deux points, la condition consiste alors à être conjuguée à un couple de points, et le théorème lui-même exprime que, sur toute droite du plan, il existe un couple de points conjugués qui résulte de quatre conditions-points. Comme cas particulier, et c'est là une véritable supériorité sur le théorème de Pascal, le théorème de Desargues permet de construire, par la règle seule, autant de points que l'on veut de la conique passant par un point *donné effectivement* et par quatre autres, *qui sont les points communs à deux coniques, déterminées chacune par cinq conditions linéaires quelconques, par exemple, par cinq points.*