NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

E. CESÀRO

Sur la distribution mutuelle des nombres polygones (solution de la question 1470)

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 5 (1886), p. 209-213

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1886_3_5__209_0>

SUR LA DISTRIBUTION MUTUELLE DES NOMBRES POLYGONES (SOLUTION DE LA QUESTION 1470);

Par M. E. CESARO.

1. Dans le système complet des nombres polygones des ordres μ et ν, rangés par ordre de grandeur, voyons comment les nombres d'un ordre sont distribués par rapport à ceux de l'autre ordre. Pour éviter tout malentendu, nous supposerons que l'on procède comme il suit : on range d'abord les nombres de l'ordre ν; puis, dans chaque intervalle, on range les nombres de l'ordre μ, en ayant soin, lorsqu'un de ces nombres coïncide avec un nombre de l'ordre ν, de le considérer comme appartenant à l'intervalle *qui le précède*. Ainsi, pour $\mu = 3$, $\nu = 4$, on écrira d'abord la suite croissante des *carrés*, et l'on entendra par *triangulaires* compris dans l'intervalle 25, 36, les nombres 28 et 36.

2. D'après ces conventions, pour qu'un nombre de l'ordre μ, de rang inconnu x, soit compris entre deux nombres donnés, de l'ordre ν, consécutifs, on doit avoir

$$(\nu-2)a^2-(\nu-4)a<(\mu-2)x^2-(\mu-4)x$$
$$\leqq(\nu-2)(a+1)^2-(\nu-4)(a+1),$$

d'où l'on tire

$$f(a)<x\leqq f(a+1),$$

après avoir posé, pour abréger,

$$f(a)=\frac{\mu-4+\sqrt{(\mu-4)^2+4(\mu-2)[(\nu-2)a^2-(\nu-4)a]}}{2(\mu-2)}.$$

Cela étant, si l'on considère i intervalles consécutifs, à partir du nombre de rang a, la quotité des nombres d'ordre μ qu'ils renferment est évidemment

$$(1) \qquad N_i(a) = [f(a+i)] - [f(a)].$$

3. Afin de chercher des limites de $N_i(a)$, voyons comment se comporte la fonction $f(a+i) - f(a)$, lorsque a croît indéfiniment depuis l'unité. On reconnaît d'abord qu'elle varie toujours dans le même sens, et que ses valeurs extrêmes sont

$$(2) \quad \begin{cases} A_i = \dfrac{-\mu + \sqrt{(\mu-4)^2 + 4(\mu-2)(i+1)[(\nu-2)i+2]}}{2(\mu-2)}, \\[2ex] B_i = i\sqrt{\dfrac{\nu-2}{\mu-2}}. \end{cases}$$

Celles-ci sont donc aussi les limites cherchées. En les comparant entre elles, on trouve que la première est inférieure à la seconde lorsque

$$\mu - \nu \quad \text{et} \quad (\mu-2)(\nu-2) - 4$$

sont de même signe, c'est-à-dire dans les cas suivants :

$$\begin{array}{llll} \mu = 3, & \mu = 5, & \mu = 6, & \mu \geqq 7, \\ \nu = 4 \text{ ou } 5, & \nu = 4, & \nu = 4 \text{ ou } 5, & \nu < \mu \end{array}$$

Il en résulte, en vertu de (1),

$$(3) \qquad A_i - 1 < N_i(a) < B_i - 1.$$

On devra écrire

$$(4) \qquad B_i - 1 < N_i(a) < A_i + 1$$

dans tous les autres cas, à savoir pour

$$\begin{array}{lll} \mu = 3, & \mu = 4, 5, 6, & \mu \geqq 4, \\ \nu \geqq 6, & \nu = 3, & \nu > \mu. \end{array}$$

4. Faisons $\mu = 3$, $\nu = 4$. Les inégalités (3) devien-

nent

$$\frac{-5+\sqrt{1+8(i+1)^2}}{2} < N_i(a) < i\sqrt{2}+1.$$

En particulier,

$$0 < \frac{\sqrt{33}-5}{2} < N_1(a) < \sqrt{2}+1 < 3.$$

Donc $N_1 = 1$ ou 2, c'est-à-dire que : *entre deux carrés consécutifs, il y a au moins un triangulaire et deux au plus.* C'est la première des propositions énoncées par Lionnet, dans la *Question* citée. La deuxième en est une conséquence naturelle. Il est évident, en effet, d'après ce qui vient d'être dit, que *deux triangulaires consécutifs comprennent entre eux un seul carré, ou bien n'en comprennent aucun.*

5. De même, pour $i = 2$, on trouve

$$1 < \frac{\sqrt{73}-5}{2} < N_2(a) < 2\sqrt{2}+1 < 4.$$

Donc $N_2 = 2$ ou 3. Il en résulte que *deux carrés de même parité, consécutifs, comprennent entre eux deux ou trois triangulaires.* L'impossibilité d'avoir $N_2 = 4$ prouve que, *si un intervalle de deux carrés consécutifs contient deux triangulaires, chacun des intervalles voisins ne peut en contenir qu'un seul.* C'est en cela que consiste la dernière proposition de Lionnet.

6. Donnons une seule application des inégalités (4), en faisant $\mu = 4$. On obtient

$$i\sqrt{\frac{\nu-2}{2}} - 1 < N_i(a) < \sqrt{\frac{(i+1)[(\nu-2)i+2]}{2}}.$$

Par exemple, pour $i = 2$, $\nu = 3$, on trouve

$$0 < \sqrt{2} - 1 < N_2(a) < \sqrt{6} < 3.$$

Il en résulte que *deux triangulaires de même parité, consécutifs, comprennent entre eux au moins un carré, et deux au plus.*

7. Les expressions (2) montrent que, si l'on fait croître i indéfiniment, on a

$$\lim \frac{A_i}{i} = \sqrt{\frac{\nu - 2}{\mu - 2}} = \frac{B_i}{i}.$$

Conséquemment, en vertu des inégalités (3) et (4), on peut affirmer que l'on a, *dans tous les cas*,

$$\lim \frac{N_i(a)}{i} = \sqrt{\frac{\nu - 2}{\mu - 2}}.$$

Remarquons, en passant, que ce résultat est indépendant de a. Cela tient à ce que les deux ordres conservent, l'un par rapport à l'autre, une fréquence constante.

8. Si μ et ν sont tels que, dans chaque intervalle, il ne puisse exister qu'un ou deux nombres de l'ordre μ, on aura, en désignant respectivement par α et β les nombres des intervalles qui se trouvent dans l'une ou l'autre de ces conditions,

$$\alpha + \beta = i, \qquad \alpha + 2\beta = N_i.$$

La probabilité que le second cas se produise est donc

$$\lim \frac{\beta}{i} = \lim \frac{N_i - i}{i} = \sqrt{\frac{\nu - 2}{\mu - 2}} - 1.$$

En particulier, dans la question traitée par Lionnet, ce résultat devient

$$\sqrt{2} - 1 = 0,414213\ldots.$$

Conséquemment : *Il y a seulement* 70 *à parier contre* 99 *environ que deux carrés consécutifs com-*

prennent, entre eux, deux triangulaires, plutôt qu'un seul. Au contraire, si l'on fait $\mu = 4$, $\nu = 3$, on trouve qu'*il y a 70 environ à parier contre 29 que deux triangulaires consécutifs comprennent entre eux un carré.* La valeur exacte de la probabilité est

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = 0,707106\ldots$$

9. Soit $Q(n)$ la quotité des nombres de l'ordre μ, non supérieurs à n. On doit avoir

$$\frac{(\mu-2)Q^2-(\mu-4)Q}{2} = n < \frac{(\mu-2)(Q+1)^2-(\mu-4)(Q+1)}{2};$$

d'où l'on tire

$$Q(n) = \left[\frac{\mu-4+\sqrt{(\mu-4)^2+8(\mu-2)n}}{2(\mu-2)}\right].$$

Asymptotiquement,

$$Q(n) = \sqrt{\frac{2}{\mu-2}}\, n^{\frac{1}{2}}.$$

Cela étant, imaginons que l'on ait mis dans une urne tous les nombres des ordres μ et ν, et que l'on en tire un, au hasard. La probabilité qu'il soit de l'ordre μ est

$$\frac{\sqrt{\nu-2}}{\sqrt{\mu-2}+\sqrt{\nu-2}}.$$

Par exemple : *Il y a environ 97 à parier contre 56 qu'un nombre est triangulaire plutôt que pentagonal.* La valeur exacte de la probabilité est

$$\frac{3-\sqrt{3}}{2} = 0,633974\ldots$$

Note. — La question 1470 a aussi été résolue par MM. Goffart et Moret-Blanc.