NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

M. DU CHATENET

# Sur les courbes dans lesquelles la projection du rayon de courbure sur le rayon vecteur est avec lui dans un rapport constant

*Nouvelles annales de mathématiques 3e série*, tome 5 (1886), p. 233-237

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1886_3_5__233_1>

# SUR LES COURBES DANS LESQUELLES LA PROJECTION DU RAYON DE COURBURE SUR LE RAYON VECTEUR EST AVEC LUI DANS UN RAPPORT CONSTANT;

PAR M. M. DU CHATENET.

Soit $m$ le rapport constant du rayon vecteur $r$ passant par un point fixe à la projection du rayon de courbure $\rho$ sur le même rayon vecteur. L'angle $\theta$ de la normale avec le rayon vecteur sera l'angle de projection et la propriété caractéristique des courbes que nous examinons sera exprimée par la relation

$$r = m\rho\cos\theta.$$

Or on a, en coordonnées polaires,

$$\rho = \frac{\left[r^2 + \left(\frac{dr}{d\omega}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{r^2 - r\frac{dr^2}{d\omega^2} + 2\left(\frac{dr}{d\omega}\right)^2}, \qquad \cos\theta = \frac{r}{\left[r^2 + \left(\frac{dr}{d\omega}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}}.$$

En portant ces valeurs dans la formule précédente, nous aurons l'équation différentielle des courbes jouissant de la propriété indiquée

$$(1) \qquad r\frac{d^2r}{d\omega^2} + (m-2)\left(\frac{dr}{d\omega}\right)^2 + (m-1)r^2 = 0.$$

Cette équation peut s'écrire comme il suit :

$$(2)\qquad \frac{\dfrac{1}{r}\dfrac{d^2r}{d\omega^2}-\dfrac{1}{r^2}\left(\dfrac{dr}{d\omega}\right)^2}{1+\dfrac{1}{r^2}\left(\dfrac{dr}{d\omega}\right)^2}+m-1=0.$$

Le numérateur de la fraction n'étant autre chose que la dérivée $\frac{1}{r}\frac{dr}{d\omega}$, l'intégration donnera

$$(3)\qquad \operatorname{arc\,tang}\frac{1}{r}\frac{dr}{d\omega}+(m-1)\omega=0$$

en supprimant la constante, ce qui, dans le cas actuel, ne nuit pas à la généralité de la question : il suffira en effet de donner à l'axe polaire une direction convenable. On aura donc

$$\frac{1}{r}\frac{dr}{d\omega}+\operatorname{tang}(m-1)\omega=0.$$

Cette équation est facile à intégrer et donne

$$(4)\qquad r^{m-1}=a^{m-1}\cos(m-1)\omega.$$

C'est l'équation générale des courbes dont nous avons parlé.

D'après (3), on voit que l'angle $\theta$ de la normale avec le rayon vecteur est égal, en valeur absolue, à $m-1$ fois l'angle de ce rayon vecteur avec une direction déterminée. On en déduit immédiatement que la normale à la courbe et le rayon vecteur font avec cette même direction des angles qui sont entre eux dans un rapport constant égal à $m$.

Le rayon de courbure aura pour expression

$$\frac{r}{m\cos(m-1)\omega}.$$

en remplaçant $\omega$ par sa valeur tirée de (4), nous aurons

$$(5) \qquad \rho = \frac{a^{m-1}}{mr^{m-2}}.$$

Il est une solution de la question qui n'est pas contenue dans la formule générale (4). L'équation (2) sera en effet vérifiée si l'on a en même temps

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{r}\frac{d^2 r}{d\omega^2} - \frac{1}{r^2}\left(\frac{dr}{d\omega}\right)^2 = 0, \\ m = 1. \end{array} \right.$$

L'intégration donne $\frac{1}{r}\frac{dr}{d\omega} = n$; d'où l'on voit que l'angle de la tangente avec le rayon vecteur sera constant. Une seconde intégration donnera

$$r = ae^{n\omega},$$

équation qui représente la spirale logarithmique. On connaît les deux propriétés caractéristiques de cette courbe : l'angle de la tangente et du rayon vecteur est constant et le rayon vecteur est égal à la projection du rayon de courbure sur lui.

Nous pouvons de la formule générale (4) tirer quelques applications particulières en donnant différentes valeurs à $m$.

1° $m = 2$. — Dans ce cas l'équation (4) donne

$$r = a\cos\omega.$$

La courbe est alors un cercle et les propriétés des angles et du rayon vecteur sont évidentes par elles-mêmes.

2° $m = 3$. — La courbe qui correspond à ce cas a pour équation

$$r = a\sqrt{\cos 2\omega}.$$

C'est la lemniscate de Bernoulli.

Pour construire la normale en un point de la lemniscate, on tracera le rayon vecteur du centre de la courbe et l'on mènera une droite faisant avec lui un angle double de celui qu'il fait avec l'axe.

Le rayon de courbure sera égal au tiers du segment de normale compris entre la courbe et la perpendiculaire élevée du centre sur le rayon vecteur. Il sera égal à $\frac{a^2}{3r}$, c'est-à-dire inversement proportionnel au rayon vecteur.

3° $m = \frac{1}{2}$. — La courbe correspondante a pour équation

$$r = \frac{2a}{1 + \cos\omega}.$$

C'est une parabole rapportée à son foyer et à son axe.

La normale à la parabole fait avec le rayon vecteur du foyer un angle égal à la moitié de celui du rayon vecteur et de l'axe.

Le rayon de courbure est égal au double du segment de normale compris entre la courbe et la perpendiculaire élevée du foyer sur le rayon vecteur. Il a pour expression $\sqrt{\frac{2r^3}{a}}$.

4° $m = \frac{3}{2}$. — La courbe fournie par cette valeur de $m$ a pour équation

$$r = \frac{a}{2}(1 + \cos\omega).$$

C'est une épicycloïde engendrée par un cercle de diamètre $\frac{a}{2}$.

La normale à l'épicycloïde s'obtiendra en faisant avec le rayon vecteur du point de rebroussement un angle égal à la moitié de celui du rayon vecteur et de la droite joignant le point de rebroussement au sommet de la courbe.

Le rayon de courbure est égal à une fois et demie le segment de normale compris entre la courbe et la perpendiculaire élevée au point de rebroussement sur le rayon vecteur. Il aura pour expression $\frac{2}{3}\sqrt{ar}$.

5° $m = -1$. — La courbe qui correspond à ce cas a pour équation

$$r = \frac{a}{\sqrt{\cos 2\omega}} \qquad \text{ou} \qquad x^2 - y^2 = a^2.$$

C'est une hyperbole équilatère rapportée à ses axes.

Dans l'hyperbole équilatère, la normale fait avec le rayon vecteur du centre un angle égal au double de celui qu'il fait avec l'axe.

Le rayon de courbure est égal au segment de normale compris entre la courbe et la perpendiculaire élevée au centre sur le rayon vecteur. Il sera égal à $\frac{r^3}{a^2}$.