F. GOMES TEIXEIRA

Sur une formule d'analyse

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 5 (1886), p. 36-39

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1886_3_5__36_1>

SUR UNE FORMULE D'ANALYSE;

PAR M. F. GOMES TEIXEIRA,
Professeur à l'École polytechnique de Porto, ancien professeur à l'Université de Coimbra.

Le but de cette Note est de démontrer le théorème suivant, que je crois nouveau :

Si les fonctions $f(x)$ *et* $\mathrm{F}(x)$ *et leurs dérivées* $f'(x)$, $\mathrm{F}'(x)$, $f''(x)$, $\mathrm{F}''(x)$, $\ldots$, $f^m(x)$, $\mathrm{F}^n(x)$ *sont finies et déterminées pour toutes les valeurs de* x *qui sont comprises dans l'intervalle* (x_0, x), *nous avons la formule*

$$
(1)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{f(x)-f(x_0)-\ldots-\dfrac{(x-x_0)^i}{i!}f^i(x_0)}{\mathrm{F}(x)-\mathrm{F}(x_0)-\ldots-\dfrac{(x-x_0)^k}{k!}f^k(x_0)}\\
&\quad=\frac{\dfrac{(x-x_0)^{i+1}}{(i+1)!}-\ldots-\dfrac{(x-x_0)^{m-1}}{(m-1)!}f^{m-1}(x_0)+\mathrm{R}}{\dfrac{(x-x_0)^{k+1}}{(k+1)!}-\ldots-\dfrac{(x-x_0)^{n-1}}{(n-1)!}\mathrm{F}^{n-1}(x_0)-\mathrm{R}'},
\end{aligned}
\right.
$$

où

$$
\mathrm{R}=\frac{(x-x_0)(1-\theta)^{m-1}f^m[x_0+\theta(x-x_0)]}{(m-1)!},
$$

$$
\mathrm{R}'=\frac{(x-x_0)(1-\theta)^{n-1}\mathrm{F}^n[x_0+\theta(x-x_0)]}{(n-1)!},
$$

θ *étant compris entre* 0 *et* 1.

Pour démontrer ce théorème, considérons la fonction

$$
\begin{aligned}
\varphi(z) = {} & f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0) + \ldots + \frac{(x - x_0)^i}{i!} f^i(x_0) \\
& - f(z) - \frac{x - z}{1} f'(z) - \ldots - \frac{(x - z)^{m-1}}{(m-1)!} f^{m-1}(z) \\
& - \left[F(x_0) + (x - x_0) F'(x_0) + \ldots + \frac{(x - x_0)^k}{k!} F^k(x_0) \right. \\
& \qquad \left. - F(z) - (x - z) F'(z) - \ldots - \frac{(x - z)^{n-1}}{(n-1)!} F^{n-1}(z) \right] \\
& \times \frac{f(x) - f(x_0) - (x - x_0) f'(x_0) - \ldots - \dfrac{(x - x_0)^i}{i!} f^i(x_0)}{F(x) - F(x_0) - (x - x_0) F'(x_0) - \ldots - \dfrac{(x - x_0)^k}{k!} F^k(x_0)}.
\end{aligned}
$$

En lui appliquant la formule connue

$$
(2) \qquad \varphi(x) = \varphi(x_0) + (x - x_0) \varphi'[x_0 + \theta(x - x_0)],
$$

on trouve le résultat

$$
\begin{aligned}
0 = {} & f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0) + \ldots + \frac{(x - x_0)^i}{i!} f^i(x_0) \\
& - f(x_0) - (x - x_0) f'(x_0) - \ldots - \frac{(x - x_0)^{m-1}}{(m-1)!} f^{m-1}(x_0) \\
& - \left[F(x_0) + (x - x_0) F'(x_0) + \ldots + \frac{(x - x_0)^k}{k!} F^k(x_0) \right. \\
& \qquad \left. - F(x_0) - (x - x_0) F'(x_0) - \ldots - \frac{(x - x_0)^{n-1}}{(n-1)!} F^{n-1}(x_0) \right] \\
& \times \frac{f(x) - f(x_0) - \ldots - \dfrac{(x - x_0)^i}{i!} f^i(x_0)}{F(x) - F(x_0) - \ldots - \dfrac{(x - x_0)^k}{k!} F^k(x_0)} \\
& + (x - x_0) \left\{ - \frac{(x - x_0)^{m-1} (1 - \theta)^{m-1}}{(m-1)!} f^m[x_0 + \theta(x - x_0)] \right. \\
& \qquad \left. + \frac{(x - x_0)^{n-1} (1 - \theta)^{n-1}}{(n-1)!} F^n[x_0 + \theta(x - x_0] \right\} \\
& \times \frac{f(x) - f(x_0) - \ldots - \dfrac{(x - x_0)^i}{i!} f^i(x_0)}{F(x) - F(x_0) - \ldots - \dfrac{(x - x_0)^k}{k!} F^k(x_0)}.
\end{aligned}
$$

De cette formule, on tire la formule (1) que nous voulions démontrer, en supposant

$$m \geqq i - 1, \qquad n \geqq k + 1.$$

I. Si l'on pose, dans la formule (1),

$$F(x) = (x - x_0)^n, \qquad k = n - 1, \qquad i = m - 1,$$

et, par conséquent,

$$F(x_0) = 0, \qquad F'(x_0) = 0, \qquad \ldots, \qquad F^{n-1}(x_0) = 0,$$
$$F^n(x_0) = n!, \qquad F^n[x_0 - \theta(x - x_0)] = n!,$$

on a

$$\frac{f(x) - f(x_0) - \ldots - \dfrac{(x - x_0)^{m-1}}{(m-1)!} f^{m-1}(x_0)}{(x - x_0)^n}$$
$$= \frac{(n-1)!(x - x_0)^m (1 - \theta)^{m-1} f^m[x_0 + \theta(x - x_0)]}{n!(m-1)!(x - x_0)^n (1 - \theta)^{n-1} F^n[x_0 + \theta(x - x_0)]}$$

et, par conséquent,

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0) - \ldots + \frac{(x - x_0)^{m-1}}{(m-1)!} f^{m-1}(x_0)$$
$$+ \frac{(x - x_0)^m (1 - \theta)^{m-n}}{(m-1)!\, n} f^m[x_0 + \theta(x - x_0)].$$

On obtient ainsi donc la formule de Taylor avec l'expression du reste de MM. Schlömich et Roche.

II. Si l'on pose, dans la formule (1), $i = k = n - 1$, on trouve

$$\frac{f(x) - f(x_0) - \ldots - \dfrac{(x - x_0)^{n-1} f^{n-1}(x_0)}{(n-1)!}}{F(x) - F(x_0) - \ldots - \dfrac{(x - x_0)^{n-1} F^{n-1}(x_0)}{(n-1)!}}$$
$$= \frac{f^n[x_0 + \theta(x - x_0)]}{F^n[x_0 + \theta(x - x_0)]}.$$

On peut voir cette formule dans le *Cours de Calcul infinitésimal* de M. Hoüel, où elle est démontrée au moyen d'intégrations.

III. Si l'on a

$$f'(x_0) = 0, \qquad f'(x_0) = 0, \qquad \ldots, \qquad f^{n-1}(x_0) = 0,$$
$$F'(x_0) = 0, \qquad F''(x_0) = 0, \qquad \ldots, \qquad F^{n-1}(x_0) = 0,$$

il vient la formule bien connue

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{F(x) - F(x_0)} = \frac{f^n[x_0 + \theta(x - x_0)]}{F^n[x_0 + \theta(x - x_0)]}.$$