Nouvelles annales de mathématiques

M. Du Chatenet

Étude sur les paris de courses (fin)

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 5 (1886), p. 408-424

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1886_3_5__408_1>

ÉTUDE SUR LES PARIS DE COURSES

[FIN (1)];

PAR M. M. DU CHATENET.

XIII. — *Arbitrages complexes.*

Les arbitrages à double opération que nous venons de voir sont les plus simples qu'on puisse imaginer. Ils présentent, dans la pratique, ce grave inconvénient qu'on ne pourra jamais faire les deux négociations en même

(1) Voir même Tome. p. 327 et 380.

temps et que, l'une étant faite, il faudra que les conditions du marché se modifient dans un sens convenable pour que l'autre puisse se faire d'une façon avantageuse.

Nous examinerons quelques exemples d'arbitrages fondés sur une triple négociation, et que l'on peut réaliser quand les conditions du marché s'y prêtent, ce qui arrive le plus souvent, sans qu'elles doivent se modifier après la conclusion d'un ou deux des paris.

Premier exemple. — Supposons qu'on puisse donner un cheval comme premier à la cote a et comme second à la cote b, et qu'on puisse le prendre à la cote c comme placé dans les deux premiers. Étudions comment cet arbitrage devra se faire pour être fructueux et dans quels cas il sera possible.

Soient p la somme qu'on accepte en donnant le cheval comme premier, q celle qu'on accepte en le donnant comme second et r celle qu'on parie pour le cheval placé. Soient A le bénéfice qu'on veut faire si le cheval arrive premier, B s'il arrive second, C s'il n'arrive ni premier ni second.

Si le cheval est premier, on gagnera q sur le pari fait en le donnant second et cr en le prenant placé; on perdra ap en le donnant premier. On aura donc la relation

$$-ap+q+cr=\mathrm{A}.$$

Si le cheval est second, on gagnera p en le donnant premier et cr en le prenant placé; on perdra bq en le donnant second; d'où la relation

$$p-bq+cr=\mathrm{B}.$$

Si le cheval n'est ni premier ni second, on gagnera p en le donnant premier et q en le donnant second; on perdra r en le prenant placé. On a donc

$$p + q - r = \mathrm{C}.$$

Si, dans ce système de trois équations, nous prenons pour inconnues les enjeux p, q, r, la solution sera

$$(28)\left\{\begin{aligned}
p &= \left[\frac{\dfrac{\mathrm{A}}{a+1} + \dfrac{\mathrm{B}}{b+1} + \mathrm{C}\left(1 - \dfrac{1}{c+1}\right)}{\dfrac{1}{a+1} + \dfrac{1}{b+1} - \dfrac{1}{c+1}} - \mathrm{A}\right]\frac{1}{a+1},\\
q &= \left[\frac{\dfrac{\mathrm{A}}{a+1} + \dfrac{\mathrm{B}}{b+1} + \mathrm{C}\left(1 - \dfrac{1}{c+1}\right)}{\dfrac{1}{a+1} + \dfrac{1}{b+1} - \dfrac{1}{c+1}} - \mathrm{B}\right]\frac{1}{b+1},\\
r &= \frac{\dfrac{\mathrm{A}}{a+1} - \dfrac{\mathrm{B}}{b+1} + \mathrm{C}\left(1 - \dfrac{1}{a+1} - \dfrac{1}{b+1}\right)}{\dfrac{1}{a+1} + \dfrac{1}{b+1} - \dfrac{1}{c+1}}\,\frac{1}{c+1}.
\end{aligned}\right.$$

D'après ces formules, la condition nécessaire et suffisante pour que p et q soient positifs est

$$\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} > \frac{1}{c+1};$$

car, d'après la nature du problème, c sera plus petit que a et b. Cette condition étant satisfaite, on pourra toujours disposer de A, B, C de manière que r soit positif. Du reste, en fait, comme on aura presque toujours

$$\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} < 1,$$

il n'y aura aucune condition nouvelle à ajouter à la précédente.

Si le bénéfice qu'on veut faire est le même dans le cas où le cheval considéré arrive premier ou second, les formules deviennent

$$(29)\quad\left\{\begin{aligned} p &= \frac{\dfrac{A-C}{c+1}+C}{\dfrac{1}{a+1}+\dfrac{1}{b+1}-\dfrac{1}{c+1}}\,\frac{1}{a+1},\\ q &= \frac{\dfrac{A-C}{c+1}+C}{\dfrac{1}{a+1}+\dfrac{1}{b+1}-\dfrac{1}{c+1}}\,\frac{1}{b+1},\\ r &= \frac{A\left(\dfrac{1}{a+1}+\dfrac{1}{b+1}\right)+C\left(1-\dfrac{1}{a+1}-\dfrac{1}{b+1}\right)}{\dfrac{1}{a+1}+\dfrac{1}{b+1}-\dfrac{1}{c+1}}\,\frac{1}{c+1}. \end{aligned}\right.$$

Dans le cas où l'on veut obtenir un bénéfice uniforme, quel que soit le résultat de la course, on a

$$(30)\quad\left\{\begin{aligned} p &= \frac{1}{\dfrac{1}{a+1}+\dfrac{1}{b+1}-\dfrac{1}{c+1}}\,\frac{P}{a+1},\\ q &= \frac{1}{\dfrac{1}{a+1}+\dfrac{1}{b+1}-\dfrac{1}{c+1}}\,\frac{P}{b+1},\\ r &= \frac{1}{\dfrac{1}{a+1}+\dfrac{1}{b+1}-\dfrac{1}{c+1}}\,\frac{P}{c+1}. \end{aligned}\right.$$

La condition nécessaire et suffisante pour la possibilité de l'arbitrage est

$$\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}>\frac{1}{c+1}.$$

Prenons un exemple numérique pour montrer l'importance des paris qu'on peut obtenir par ce moyen. Soient un cheval coté 3 comme premier, 1,5 comme second, et 1 placé dans les deux premiers. Supposons qu'on veuille gagner 200^{fr} si le cheval arrive premier ou second, et 100^{fr} s'il n'est pas placé. On le donnera comme premier pour 250^fr^ et comme second pour 400^fr^, et on le prendra placé pour 550^fr^.

Si, avec les mêmes cotes, on veut obtenir un bénéfice de 150^fr^ en toute hypothèse, on le donnera comme premier pour 250^fr^ et comme second pour 400^fr^, et on le prendra placé pour 500^fr^.

On peut aussi ne chercher un bénéfice dans l'arbitrage que dans une ou deux des trois hypothèses qu'on peut faire sur le résultat de la course, tout en se couvrant contre les hypothèses les moins favorables, c'est-à-dire chercher à obtenir, dans certains cas, un gain aléatoire, en se mettant à l'abri contre toute possibilité de perte.

Supposons que, dans le cas actuel, on veuille obtenir un bénéfice P si le cheval considéré est placé dans les deux premiers, tout en se couvrant contre les autres éventualités. Les formules (28) donneront, en faisant $A = B = 0$,

$$(31)\quad \left\{\begin{aligned} p &= \frac{1 - \dfrac{1}{c+1}}{\dfrac{1}{a+1} + \dfrac{1}{b+1} - \dfrac{1}{c+1}}\,\frac{P}{a+1}, \\ q &= \frac{1 - \dfrac{1}{c+1}}{\dfrac{1}{a+1} + \dfrac{1}{b+1} - \dfrac{1}{c+1}}\,\frac{P}{b+1}, \\ r &= \frac{1 - \dfrac{1}{a+1} - \dfrac{1}{b+1}}{\dfrac{1}{a+1} + \dfrac{1}{b+1} - \dfrac{1}{c+1}}\,\frac{P}{c+1}. \end{aligned}\right.$$

Pour que les valeurs de p et q soient positives, la seule condition est que le dénominateur soit positif. Il faudra alors, pour qu'il y ait une solution au problème, que le numérateur de r le soit aussi. La condition nécessaire et suffisante de possibilité pour ce mode d'arbitrage sera donc exprimée par la double inégalité

$$\frac{1}{c+1} < \frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} < 1.$$

On peut chercher à faire un arbitrage sur le même sujet que nous avons pris comme exemple, mais en procédant d'une manière contraire à celle qui a été exposée. On prend un cheval premier et second aux cotes a et b et on le donne placé à la cote c. Si nous conservons les mêmes notations que précédemment, nous verrons que les trois cas à considérer conduisent aux trois équations suivantes :

$$\left\{\begin{aligned} ap - q - cr &= A,\\ -p + bq - cr &= B,\\ -p - q + r &= C. \end{aligned}\right.$$

En comparant ce système d'équations au système obtenu déjà, on remarquera qu'on peut passer du premier au second en changeant les signes de p, q, r. Cette simple observation permettra donc d'écrire les valeurs des inconnues

$$(32)\quad \left\{\begin{aligned} p &= \left[\frac{\dfrac{A}{a+1} + \dfrac{B}{b+1} + C\left(1 - \dfrac{1}{c+1}\right)}{\dfrac{1}{c+1} - \dfrac{1}{a+1} - \dfrac{1}{b+1}} + A\right]\frac{1}{a+1},\\ q &= \left[\frac{\dfrac{A}{a+1} + \dfrac{B}{b+1} + C\left(1 - \dfrac{1}{c+1}\right)}{\dfrac{1}{c+1} - \dfrac{1}{a+1} - \dfrac{1}{b+1}} + B\right]\frac{1}{b+1},\\ r &= \frac{\dfrac{A}{a+1} + \dfrac{B}{b+1} + C\left(1 - \dfrac{1}{a+1} - \dfrac{1}{b+1}\right)}{\dfrac{1}{c+1} - \dfrac{1}{a+1} - \dfrac{1}{b+1}}\,\frac{1}{c+1}. \end{aligned}\right.$$

La condition nécessaire et suffisante pour que ces valeurs soient positives est

$$\frac{1}{c+1} > \frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1}. \tag{33}$$

Ces deux modes de tenter un arbitrage montrent qu'il y aura toujours possibilité de le faire, pourvu qu'on n'ait pas $\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} = \frac{1}{c+1}$; car, s'il n'est pas possible d'une manière, on l'obtiendra au moyen des négociations contraires.

On pourrait encore vouloir donner un cheval premier et le prendre second et placé. Les trois équations qui résultent de l'analyse de la question sont

$$\begin{aligned} -ap - q + cr &= A, \\ p + bq + cr &= B, \\ p - q - r &= C. \end{aligned}$$

Ce système se déduit du premier en changeant le signe de q; p et q seront donc forcément de signes contraires; par conséquent, cette hypothèse doit être écartée.

Un quatrième mode d'arbitrage sur le même sujet consisterait à prendre un cheval premier et à le donner second et placé. Les équations qui résultent de cette manière d'opérer sont

$$\begin{aligned} ap - q - cr &= A, \\ -p - bq - cr &= B, \\ -p + q + r &= C. \end{aligned}$$

La seconde équation ne pourra être satisfaite par des valeurs positives des inconnues; ce mode d'arbitrage est donc impossible.

On peut encore donner un cheval second et le prendre premier et placé. Ce cas donne lieu à des observations analogues à celles faites à propos du troisième mode.

On peut enfin prendre un cheval second et le donner premier et placé. Il y a impossibilité comme pour le quatrième mode.

Deuxième exemple. — L'étude de l'arbitrage que nous venons d'examiner fournit la solution de la question suivante : Faire un arbitrage en pariant que, sur deux chevaux désignés, l'un d'eux, qu'on ne désigne pas, arrivera ou n'arrivera pas premier.

Un mode consisterait à prendre le groupe des deux chevaux et à donner chacun d'eux premier.

Si l'on appelle a et b les cotes des deux chevaux pris séparément et c celle du groupe qu'ils forment à eux deux, il n'y aura rien à changer aux formules déjà obtenues.

Troisième exemple. — Quand il s'agit de désigner le vainqueur dans deux courses différentes, on peut tenter de faire un arbitrage sur cette combinaison.

On donne les chevaux séparément dans chaque course et on les prend tous les deux ensemble comme premier dans les deux courses.

Soient a et b les cotes des deux chevaux pris isolément et c celle de la combinaison des deux premiers. Soient A le bénéfice qu'on fait si le cheval coté a arrive, B si c'est le cheval coté b, C si les chevaux arrivent tous deux, et D si aucun des deux n'arrive.

Les quatre hypothèses qu'on peut faire sur le résultat de la course fournissent les quatre équations suivantes :

$$\begin{aligned}
-ap + q - r &= \mathrm{A},\\
p - bq - r &= \mathrm{B},\\
-ap - bq + cr &= \mathrm{C},\\
p + q - r &= \mathrm{D}.
\end{aligned}$$

Nous pourrons, dans ces équations, considérer p, q,

r et D comme inconnues. De là nous tirerons

$$
(35)\quad
\left\{
\begin{aligned}
p &= \frac{1}{\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}-\frac{1}{c+1}-1}\left[A\left(1-\frac{1}{b+1}\right)-B\left(\frac{1}{b+1}-\frac{1}{c+1}\right)+C\frac{1}{c+1}\right]\frac{1}{a+1},\\
q &= \frac{1}{\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}-\frac{1}{c+1}-1}\left[A\left(\frac{1}{a+1}-\frac{1}{c+1}\right)+B\left(1-\frac{1}{a+1}\right)+C\frac{1}{c+1}\right]\frac{1}{b+1},\\
r &= \frac{1}{\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}-\frac{1}{c+1}-1}\left[A\left(1-\frac{1}{b+1}\right)+B\left(1-\frac{1}{a+1}\right)+C\left(\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}-1\right)\right]\frac{1}{c+1},\\
D &= \frac{1}{\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}-\frac{1}{c+1}-1}\left[A\left(\frac{1}{a+1}-\frac{1}{c+1}\right)-B\left(\frac{1}{b+1}-\frac{1}{c+1}\right)-C\frac{1}{c+1}\right].
\end{aligned}
\right.
$$

Les numérateurs de p, q, r, D sont formés de termes tous positifs; car il est évident, d'après la nature de la question, que c sera toujours plus grand que a et que b. La seule condition de possibilité du problème, condition à la fois nécessaire et suffisante, sera donc

$$\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}>1+\frac{1}{c+1}.$$

Si l'on veut obtenir un bénéfice uniforme dans les trois premiers cas, les formules donneront

$$
(36)\quad \left\{
\begin{aligned}
p &= \frac{P}{\dfrac{1}{a+1}+\dfrac{1}{b+1}-\dfrac{1}{c+1}-1}\,\frac{1}{a+1},\\
q &= \frac{P}{\dfrac{1}{a+1}+\dfrac{1}{b+1}-\dfrac{1}{c+1}-1}\,\frac{1}{b+1},\\
r &= \frac{P}{\dfrac{1}{a+1}+\dfrac{1}{b+1}-\dfrac{1}{c+1}-1}\,\frac{1}{c+1},\\
D &= \frac{P}{\dfrac{1}{a+1}+\dfrac{1}{b+1}-\dfrac{1}{c+1}-1}\left(\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}-\frac{1}{c+1}\right).
\end{aligned}
\right.
$$

La condition de possibilité montre que les cotes a et b ne pourront varier que dans des limites très étroites; elles devront toujours être très faibles, en général une fraction de l'unité. Par exemple, si $a=1$, $b=\frac{1}{2}$, il en résultera que c devra être supérieur à 5. Une telle disproportion entre ces cotes ne se trouvera jamais sur le marché, et l'on peut dire que les formules (35) ne donnent qu'un mode d'arbitrage purement théorique et incapable de rendre des services dans la pratique.

On pourra tenter un arbitrage sur le même sujet en opérant d'une manière toute contraire à la précédente, c'est-à-dire en prenant les deux chevaux et en donnant la combinaison. Il suffira, pour obtenir les valeurs de p, q, r, D, de changer les signes de celles fournies par les formules (35). Alors D qui est égal à $r-p-q$ aura pour expression

$$
\begin{aligned}
D = {} & \frac{1}{1+\dfrac{1}{c+1}-\dfrac{1}{a+1}-\dfrac{1}{b+1}}\\
& \times\left[A\left(\frac{1}{c+1}-\frac{1}{a+1}\right)+B\left(\frac{1}{c+1}-\frac{1}{b+1}\right)-\frac{C}{c+1}\right].
\end{aligned}
$$

Si l'on a $\frac{1}{c+1} > \frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1}$, condition nécessaire et suffisante pour que p, q, r soient positifs, la valeur de D sera toujours négative, et il n'y aura pas d'arbitrage possible.

On peut essayer, d'une autre manière, un arbitrage sur le même sujet. On pourra prendre l'un des chevaux et donner la combinaison et l'autre cheval, ce qui peut se faire de deux façons différentes. Le système d'équations répondant à cette question serait obtenu en changeant, dans celui déjà étudié, les signes de q et r. Or les numérateurs de p et q, d'après les formules, sont toujours positifs; il en résulterait que p et q seraient de signes contraires. L'arbitrage n'est donc pas possible.

On peut enfin donner l'un des chevaux et prendre la combinaison et l'autre cheval, et cela de deux manières différentes; mais alors, si le cheval qu'on a donné arrive et si celui qu'on a pris n'arrive pas, on perd les trois paris à la fois. L'arbitrage sera donc impossible.

Quatrième exemple. — Dans une même course, on peut avoir l'idée d'un arbitrage sur la combinaison du premier et du second et sur les deux mêmes chevaux considérés isolément comme premier et comme second.

On donnera un cheval premier et l'autre cheval second, et l'on prendra la combinaison.

Cette question revient à celle que nous venons d'analyser. Il n'y aura rien à changer aux résultats obtenus, si l'on convient de désigner par a la cote du premier, b celle du second et c celle de la combinaison.

Cinquième exemple. — Soit un cheval engagé dans deux courses, avec la cote a dans la première, b dans la seconde, et c comme premier dans l'une des deux courses, sans préciser laquelle. On peut chercher à faire un arbitrage sur une pareille question.

On prend le cheval premier dans chacune des deux courses et on le donne premier dans l'une quelconque.

Quatre cas pourront se présenter :

1° Le cheval arrivera dans la première course et pas dans la seconde;

2° Il arrivera dans la seconde et pas dans la première;

3° Il n'arrivera dans aucune des deux courses;

4° Il arrivera dans les deux.

Ce qui donne lieu, en continuant à employer les notations déjà adoptées, aux équations suivantes :

$$\left\{\begin{aligned} ap - q - cr &= \mathrm{A}, \\ -p + bq - cr &= \mathrm{B}, \\ -p - q + r &= \mathrm{C}, \\ ap + bq - cr &= \mathrm{D}. \end{aligned}\right.$$

Dans ces quatre équations, nous considérerons comme inconnues p, q, r, D. Notons que, d'après la nature de la question, c devra être la plus petite des trois cotes considérées.

En résolvant les équations, on obtient

$$(37)\quad \left\{\begin{aligned} p &= \left[\frac{\dfrac{\mathrm{A}}{a+1} + \dfrac{\mathrm{B}}{b+1} + \mathrm{C}\left(1 - \dfrac{1}{c+1}\right)}{\dfrac{1}{c+1} - \dfrac{1}{a+1} - \dfrac{1}{b+1}} + \mathrm{A}\right]\frac{1}{a+1}, \\ q &= \left[\frac{\dfrac{\mathrm{A}}{a+1} + \dfrac{\mathrm{B}}{b+1} + \mathrm{C}\left(1 - \dfrac{1}{c+1}\right)}{\dfrac{1}{c+1} - \dfrac{1}{a+1} - \dfrac{1}{b+1}} + \mathrm{B}\right]\frac{1}{b+1}, \\ r &= \frac{\dfrac{\mathrm{A}}{a+1} + \dfrac{\mathrm{B}}{b+1} + \mathrm{C}\left(1 - \dfrac{1}{a+1} - \dfrac{1}{b+1}\right)}{\dfrac{1}{c+1} - \dfrac{1}{a+1} - \dfrac{1}{b+1}}\,\frac{1}{c+1}, \\ \mathrm{D} &= \frac{\mathrm{A}\left(\dfrac{1}{c+1} - \dfrac{1}{b+1}\right) + \mathrm{B}\left(\dfrac{1}{c+1} - \dfrac{1}{a+1}\right) + \mathrm{C}\left(1 - \dfrac{1}{c+1}\right)}{\dfrac{1}{c+1} - \dfrac{1}{a+1} - \dfrac{1}{b+1}}. \end{aligned}\right.$$

Lorsque la condition $\frac{1}{c+1} > \frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1}$ sera vérifiée, ces quatre valeurs seront toujours positives, et un arbitrage sera possible.

Si l'on veut obtenir un bénéfice uniforme dans les trois premiers cas, les formules donneront

$$(38)\quad \left\{\begin{aligned} p &= \frac{P}{\frac{1}{c+1} - \frac{1}{a+1} - \frac{1}{b+1}}\,\frac{1}{a+1},\\ q &= \frac{P}{\frac{1}{c+1} - \frac{1}{a+1} - \frac{1}{b+1}}\,\frac{1}{b+1},\\ r &= \frac{P}{\frac{1}{c+1} - \frac{1}{a+1} - \frac{1}{b+1}}\,\frac{1}{c+1},\\ D &= P\left(1 + \frac{1}{\frac{1}{c+1} - \frac{1}{a+1} - \frac{1}{b+1}}\right); \end{aligned}\right.$$

d'où l'on voit que, quel que soit le bénéfice qu'on se fixe pour les trois premiers cas, celui qu'on obtiendra dans le quatrième sera de beaucoup le plus important.

Prenons un exemple numérique. Supposons que les cotes d'un cheval comme premier soient 3 et 4 dans la première et la seconde course et 1 comme premier dans l'une quelconque des deux courses, et qu'on veuille gagner 100^{fr} dans les trois premiers cas. On prendra le cheval pour 500^{fr} et 400^{fr} dans chaque course, et on le donnera pour 1000^{fr} dans l'une des deux qu'on ne précise pas. Le bénéfice obtenu, s'il arrive dans les deux courses, sera de

$$2100^{fr}.$$

On pourrait avoir l'idée de faire l'arbitrage d'une manière inverse de la précédente, c'est-à-dire en donnant le cheval premier dans chaque course et en le prenant premier dans l'une d'elles. Les équations qui serviraient à l'étude directe de cette question ne diffèrent de celles que nous venons de résoudre que par le signe de p, q, r; on connaîtra donc facilement les valeurs de ces inconnues. Le quatrième cas donne pour valeur D du bénéfice $cr - ap - bq$. Or, si l'on y porte les valeurs de p, q, r, on trouve

$$D = \frac{1}{\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} - \frac{1}{c+1}} \times \left[A\left(\frac{1}{b+1} - \frac{1}{c+1}\right) + B\left(\frac{1}{a+1} - \frac{1}{c+1}\right) - C\left(1 - \frac{1}{c+1}\right)\right]$$

Si $\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} > \frac{1}{c+1}$, la valeur de D sera toujours négative. Si cette inégalité n'était pas vérifiée, les valeurs de p et q seraient négatives. Il n'y aurait donc pas d'arbitrage possible.

Sixième exemple. — Prenons maintenant un exemple d'arbitrage à quadruple opération.

Soit un cheval engagé dans deux courses différentes et coté a et b dans chacune d'elles. Soient c sa cote quand on parie qu'il arrivera premier dans l'une ou dans l'autre des deux courses, sans préciser laquelle, et d sa cote quand on parie qu'il gagnera les deux courses.

Remarquons, d'après cela, que, à un même moment sur le marché, c sera la plus petite des quatre cotes, et d la plus grande.

On donne le cheval premier dans chacune des deux courses, on le prend premier dans l'une des deux qu'on ne précise pas, et on le prend aussi premier dans les deux ensemble.

Il y aura, dans l'examen de la question, quatre cas à considérer :

1° Le cheval gagne seulement la première course;

2° Il gagne seulement la seconde;

3° Il gagne les deux;

4° Il n'en gagne aucune.

Ces différents cas se traduiront par les quatre équations suivantes, en appelant A, B, C, D les bénéfices obtenus dans chaque hypothèse et p, q, r, s les divers enjeux :

$$\left\{\begin{aligned} -ap + q + cr - s &= \mathrm{A}, \\ p - bq + cr + ds &= \mathrm{B}, \\ -ap - bq + cr - ds &= \mathrm{C}, \\ p + q - r - s &= \mathrm{D}. \end{aligned}\right.$$

Les racines de ce système de quatre équations fourniront les valeurs de p, q, r, s :

$$(39)\quad \left\{\begin{aligned}
p &= \frac{\left[\begin{array}{c}\mathrm{A}\left(\frac{1}{c+1} - \frac{1}{b+1}\right) + \mathrm{B}\left(\frac{1}{b+1} - \frac{1}{d+1}\right) \\ + \frac{\mathrm{C}}{d+1} + \mathrm{D}\left(1 - \frac{1}{c+1}\right)\end{array}\right]}{\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} - \frac{1}{c+1} - \frac{1}{d+1}} \frac{1}{a+1}, \\
q &= \frac{\left[\begin{array}{c}\mathrm{A}\left(\frac{1}{a+1} - \frac{1}{d+1}\right) + \mathrm{B}\left(\frac{1}{c+1} - \frac{1}{a+1}\right) \\ + \frac{\mathrm{C}}{d+1} + \mathrm{D}\left(1 - \frac{1}{c+1}\right)\end{array}\right]}{\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} - \frac{1}{c+1} - \frac{1}{d+1}} \frac{1}{b+1}, \\
r &= \frac{\left[\begin{array}{c}\mathrm{A}\left(\frac{1}{a+1} - \frac{1}{d+1}\right) + \mathrm{B}\left(\frac{1}{b+1} - \frac{1}{d+1}\right) \\ + \frac{\mathrm{C}}{d+1} + \mathrm{D}\left(1 - \frac{1}{a+1} - \frac{1}{b+1} + \frac{1}{d+1}\right)\end{array}\right]}{\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} - \frac{1}{c+1} - \frac{1}{d+1}} \frac{1}{c+1}, \\
s &= \frac{\left[\begin{array}{c}\mathrm{A}\left(\frac{1}{c+1} - \frac{1}{b+1}\right) + \mathrm{B}\left(\frac{1}{c+1} - \frac{1}{a+1}\right) \\ + \mathrm{C}\left(\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} - \frac{1}{c+1}\right) + \mathrm{D}\left(1 - \frac{1}{c+1}\right)\end{array}\right]}{\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} - \frac{1}{c+1} - \frac{1}{d+1}}.
\end{aligned}\right.$$

D'après ce que nous avons dit sur les grandeurs relatives des diverses cotes qui figurent dans ces formules, les numérateurs de p et q seront toujours positifs. Il est donc nécessaire et suffisant, pour que p et q soient positifs, que le dénominateur commun soit positif. Dans la valeur de s, les coefficients de A, B, D sont positifs; quant à celui de C, il le sera aussi quand la condition précédente sera satisfaite. Comme on dispose entièrement de A, B, C, D, on pourra toujours les prendre tels que la valeur de r soit positive. On peut donc dire que la condition à laquelle doivent satisfaire les cotes pour que l'arbitrage soit possible est la suivante :

$$\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}>\frac{1}{c+1}+\frac{1}{d+1}.$$

Quand on se propose d'obtenir un bénéfice uniforme P en toute hypothèse, les formules se simplifient notablement et deviennent

$$(40)\quad\left\{\begin{aligned}
p &= \frac{P}{\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}-\frac{1}{c+1}-\frac{1}{d+1}}\,\frac{1}{a+1},\\
q &= \frac{P}{\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}-\frac{1}{c+1}-\frac{1}{d+1}}\,\frac{1}{b+1},\\
r &= \frac{P}{\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}-\frac{1}{c+1}-\frac{1}{d+1}}\,\frac{1}{c+1},\\
s &= \frac{P}{\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}-\frac{1}{c+1}-\frac{1}{d+1}}\,\frac{1}{d+1}.
\end{aligned}\right.$$

Prenons un exemple numérique. Soit un cheval coté 3 dans la première course, 5 dans la seconde, 2 premier dans l'une ou l'autre, 19 premier dans les deux. Les enjeux, pour obtenir un bénéfice uniforme de 100^{fr}, devront être les suivants :

$$750^{fr},\quad 500^{fr},\quad 1000^{fr},\quad 150^{fr}.$$

On pourra, sur le même sujet, faire un arbitrage de la manière contraire, lorsqu'on aura

$$\frac{1}{c+1}+\frac{1}{d+1}>\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1},$$

en prenant le cheval premier dans chacune des deux courses isolément et en le donnant premier dans l'une ou l'autre. En effet, les valeurs de p, q, r, s seront les mêmes en valeur absolue, mais de signe contraire.

Il y aura donc toujours un arbitrage possible, pourvu qu'on n'ait pas $\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}=\frac{1}{c+1}+\frac{1}{d+1}$.