E. CESÀRO

Sur l'évaluation approchée de certaines séries

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 5 (1886), p. 449-456
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1886_3_5__449_0>

SUR L'ÉVALUATION APPROCHÉE DE CERTAINES SÉRIES;

PAR M. E. CESARO.

1. La formule (4) de notre article *Sur la série de Lambert* [1] est susceptible, avons-nous dit, de nombreuses applications. Déterminons, par exemple, la série des nombres u, de manière que l'on ait

$$(9) \qquad (u_p - 1) f(p) = (u_{p-1} + 1) f(p-1).$$

La formule (4) devient

$$(10) \qquad U_n + V_n = \tfrac{1}{2} \log \frac{(u_n + 1) f(n)}{(u_0 + 1) f(0)}.$$

Ayant attribué à u_0 une valeur arbitraire, il est facile de reconnaître que, pour satisfaire à (9), il faut prendre

$$(11) \qquad u_p = 1 + \frac{2}{f(p)} \left[\frac{u_0 + 1}{2} f(0) + f(1) + \ldots + f(p-1) \right].$$

Si l'on fait, par exemple, $f(p) = x^p$, on trouve

$$u_p = \frac{1+x}{1-x} \, \frac{1-x^p}{x^p} + \frac{u_0}{x^p}.$$

Ainsi, nous pouvons prendre, pour x différent de l'unité,

$$u_0 = \frac{1+x}{1-x} \, \frac{1-\alpha}{\alpha}, \qquad u_p = \frac{1+x}{1-x} \, \frac{1-\alpha x^p}{\alpha x^p}.$$

Cela étant, si l'on pose

$$S_n = \frac{\alpha x}{1 - \alpha x} + \frac{\alpha x^2}{1 - \alpha x^2} + \frac{\alpha x^3}{1 - \alpha x^3} + \ldots + \frac{\alpha x^n}{1 - \alpha x^n},$$

[1] Voir *Nouvelles Annales*, p. 106; 1886.

on a

$$(12)\quad \begin{cases} U_n = \dfrac{1-x}{1+x}\mathrm{S}_n, \\ U_n + V_n = \frac{1}{2}\log\left[1 + 2\alpha x\,\dfrac{1-x^n}{1-(2\alpha-1)x}\right], \end{cases}$$

et il nous reste à chercher des limites de V_n. Les premiers développements que nous avons donnés, dans ce but, dans l'article *Sur la série de Lambert,* sont indépendants de la valeur de u_0, de sorte que nous pourrons toujours écrire, conformément à l'inégalité (6),

$$(13)\qquad V - V_n < \frac{1}{6}\left[\frac{x}{u_n} - (1-x)(U - U_n)\right].$$

Or, à cause de

$$u_p < \frac{1+x}{1-x}\,\frac{1}{\alpha x^p},\qquad U - U_n = \sum_{p=n+1}^{p=\infty}\frac{1}{u_p},$$

on a

$$U - U_n > \alpha\,\frac{1-x}{1+x}\sum_{p=n+1}^{p=\infty} x^p = \frac{1-\alpha x^n}{1-x}\,\frac{x}{u_n}.$$

A fortiori, nous pourrons écrire, en vertu de (13),

$$V - V_n < \frac{\alpha}{6}\,\frac{x^{n+1}}{u_n},\qquad V_n = V - \frac{\theta\alpha x^{n+1}}{6u_n},$$

θ étant une fraction proprement dite. Par conséquent, la formule (12) devient

$$(14)\quad \mathrm{S}_n = \frac{1+x}{1-x}\log\sqrt{\frac{1+x-2\alpha x^{n+1}}{1+x-2\alpha x}} + \frac{\theta\alpha^2 x^{2n+1}}{6(1-\alpha x^n)} + \text{const.},$$

d'où l'on déduit l'égalité

$$\sum_{p=n+1}^{p=\infty}\frac{\alpha x^p}{1-\alpha x^p} = \frac{1+x}{1-x}\log\sqrt{\frac{1+x}{1+x-2\alpha x^{n+1}}} - \frac{\theta\alpha^2 x^{2n+1}}{6(1-\alpha x^n)},$$

généralisation de la formule (8).

2. On peut prendre, d'après (11),

$$f(p) = 1, \qquad u_0 = 2x, \qquad u_p = 2(p+x),$$

et l'on est ainsi conduit à évaluer la série

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{2+x} + \frac{1}{3+x} + \ldots + \frac{1}{n+x}.$$

On a, en effet,

$$U_n = \tfrac{1}{2}\sigma_n(x), \qquad V - V_n = \frac{\theta}{12(n+x)^2}.$$

Par suite, l'égalité (10) devient

$$(15) \qquad \sigma_n(x) = C(x) + \log\left(\frac{1}{2} + \frac{n}{2x+1}\right) + \frac{\theta}{6(n+x)^2}.$$

Dans cette formule, $C(x)$ représente une fonction de x, *indépendante de n*. En particulier, pour $x = 0$, on voit que la somme des n premiers termes de la série harmonique est

$$\sigma_n(0) = C + \log\left(n + \frac{1}{2}\right) + \frac{\theta}{6n^2},$$

où

$$C = C(0) = 0,5772156649015 32\ldots.$$

Il est facile d'exprimer la fonction $C(x)$ au moyen de la *fonction harmonique*

$$H(x) = \int_0^1 \frac{1-\varphi^x}{1-\varphi}\,d\varphi = \sum_{p=1}^{p=\infty}\left[\frac{1}{p} - \frac{1}{p+x}\right],$$

que l'on rencontre si fréquemment dans le calcul des éventualités arithmétiques. On doit remarquer, à cet effet, que, pour n infini,

$$\lim\left[\sigma_n(0) - \sigma_n(x)\right] = H(x):$$

d'où l'on tire, au moyen de (15),

$$C(x) = C - H(x) + \log(2x+1).$$

La formule (15) devient donc

$$\sum_{p=1}^{p=n} \frac{1}{p+x} = C - H(x) + \log\left(n - x + \frac{1}{2}\right) + \frac{\theta}{6(n+x)^2}.$$

On en déduit aisément d'autres relations intéressantes, telles que la formule

$$H(x) = \sum_{p=1}^{p=n} \left[\frac{1}{p} - \frac{1}{p+x}\right] + \log\left(1 + \frac{2x}{2n+1}\right) \pm \frac{\theta}{6n^2},$$

qui permet de calculer les valeurs de l'intégrale H avec une approximation aussi grande qu'on le désire.

3. La fonction harmonique est un cas particulier de la suivante :

$$\mathfrak{H}(x, y) = \sum_{p=1}^{p=\infty} \left[x^p \frac{1-x}{1-x^p} - x^{p+y} \frac{1-x}{1-x^{p+y}}\right].$$

On a, en effet,

$$\mathfrak{H}(1, y) = H(y).$$

Nous nous réservons de faire connaître, dans une autre Note, les propriétés, très intéressantes, de la fonction $\mathfrak{H}$. Remarquons ici que cette fonction intervient dans l'égalité (14), alors que l'on cherche à déterminer, en fonction de x et α, la *constante* qui figure dans le second membre. Si l'on désigne par $\mathfrak{S}(x)$ *la somme de la série de Lambert*, on trouve aisément

$$\sum_{p=1}^{p=n} \frac{\alpha x^p}{1-\alpha x^p} = \frac{1+x}{1-x} \log\sqrt{1 - 2\alpha \frac{x^{n+1}}{1+x}}$$
$$+ \mathfrak{S}(x) - \frac{1}{1-x} \mathfrak{H}\left(x, \frac{\log\alpha}{\log x}\right) + \frac{\theta \alpha^2 x^{2n+1}}{6(1-\alpha x^n)}.$$

Toutes ces séries sont susceptibles d'une transformation remarquable, que nous avons indiquée ailleurs ([1]). On a

$$\sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{\alpha x^p}{1-\alpha x^p} = \sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{(-1)^{p+1}}{1-x^p}\,\frac{\alpha x}{1-\alpha x}\,\frac{\alpha x^2}{1-\alpha x^2}\cdots\frac{\alpha x^p}{\alpha-\alpha x^p}.$$

On en déduit

$$\begin{aligned}\mathfrak{G}(x,y) = \sum_{p=1}^{p=\infty} &(-1)^{p+1}\,\frac{1-x}{1-x^p}\\ &\times\left\{\frac{x}{1-x}\,\frac{x^2}{1-x^2}\cdots\frac{x^p}{1-x^p} - \frac{x^{1+y}}{1-x^{1+y}}\,\frac{x^{2+y}}{1-x^{2+y}}\cdots\frac{x^{p+y}}{1-x^{p+y}}\right\}.\end{aligned}$$

4. Une autre application intéressante est fondée sur l'identité

$$\begin{aligned}1 + \sum_{p=1}^{p=n} &\frac{a_p}{(1-a_0)(1-a_1)\ldots(1-a_p)}\\ &= \frac{1}{(1-a_0)(1-a_1)\ldots(1-a_n)},\end{aligned}$$

laquelle, si l'on fait

$$f(p) = \frac{a_p}{(1-a_0)(1-a_1)(1-a_2)\ldots(1-a_p)},$$

permet de prendre

$$u_0 = \frac{2-a_0}{a_0}, \qquad u_p = \frac{2-a_p}{a_p}.$$

Dans ce cas, la formule (10) devient

$$(1-a_1)(1-a_2)(1-a_3)\ldots(1-a_n) = e^{-2(\mathrm{U}_n+\mathrm{V}_n)},$$

et il est possible de l'employer pour l'évaluation approchée de certains produits. En particulier, on l'applique sans peine à la recherche de formules analogues à celle

---

([1]) *Voir*, dans *Mathesis*, l'article : *Source d'identites.*

de Stirling, et de formules plus générales, que l'on obtient en prenant

$$a_p = 2\alpha x^p, \qquad u_p = \frac{1 - \alpha x^p}{\alpha x^p}.$$

Enfin, il est évident que les procédés dont nous nous sommes servi dans cette Note sont applicables à un développement quelconque, différent de la relation (1). Il y a plus : cette même égalité, mise sous une autre forme, donne lieu à une infinité d'autres formules d'approximation. Si, par exemple, on multiplie par p la formule (1), on a

$$2(1 + v_p) = p \log \frac{p+1}{p-1}, \qquad v_p < \frac{1}{6}\left(\frac{1}{p-1} - \frac{1}{p+1}\right);$$

puis

$$\left(\frac{u_1 - 1}{u_1 - 1}\right)^{u_1} \left(\frac{u_2 + 1}{u_2 - 1}\right)^{u_2} \left(\frac{u_3 + 1}{u_3 - 1}\right)^{u_3} \cdots \left(\frac{u_n + 1}{u_n - 1}\right)^{u_n} = e^{2(n + \mathrm{V}_n)},$$

où

$$\mathrm{V} - \mathrm{V}_n < \frac{1}{6} \sum_{p=n+1}^{p=\infty} \left[\frac{1}{u_p - 1} - \frac{1}{u_p + 1}\right].$$

On retrouve, au moyen de la dernière égalité, la formule de Stirling, et l'on peut même démontrer, plus généralement, que

$$(x+1)(x+2)(x+3)\ldots(x+n)$$
$$= \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(1+x)} (x+n)^{x+n+\frac{1}{2}} e^{-(x+n) + \frac{\theta}{12(x+n)^2}}.$$

Cette relation peut servir, avec fruit, à l'étude de la fonction Γ. Il est vrai que ces résultats sont fort connus; mais il y a toujours quelque utilité à pouvoir y parvenir par des considérations purement élémentaires.

5. Dans toutes ces recherches, la difficulté réside

dans l'évaluation approchée de V_n, que l'on effectue toujours d'après l'inégalité

$$V - V_n < \frac{1}{6} \sum_{p=n+1}^{p=\infty} \left[\frac{1}{u_p - 1} + \frac{1}{u_p + 1} - \frac{2}{u_p} \right],$$

lorsque la formule (1) est prise comme point de départ. Il est facile de voir que, *si le rapport de u_p à $f(p)$ est continuellement croissant, on a*

$$V_n = V - \frac{\theta}{6 u_n^2}.$$

On suppose, bien entendu, comme dans tout ce qui précède, que les nombres u sont positifs. Si, par exemple, on veut appliquer le dernier résultat au cas de

$$f(p) = x^p, \qquad u_p = \frac{1+x}{1-x} \frac{1 - \alpha x^p}{\alpha x^p} \qquad (0 < x < 1),$$

on trouve que l'on doit avoir

$$\alpha < \frac{1+x}{x^{p+1}},$$

ce qui est toujours vrai, puisque les nombres u ne sauraient être tous positifs, si α surpassait $\frac{1}{x}$. Pour des valeurs suffisamment élevées de n, la nouvelle expression de V_n finit par être toujours plus approchée que celle que nous avons trouvée au commencement de cette Note. En général, il est possible d'obtenir des résultats de plus en plus approchés en observant que la limite supérieure trouvée pour $V - V_n$ est la somme de la série convergente

$$\frac{1}{6} \sum_{p=}^{p=\infty} \left[\frac{1}{u_{n+p}(u_{n+p} - 1)} - \frac{1}{u_{n+p}(u_{n+p} + 1)} \right],$$

dont les termes, alternativement positifs et négatifs, vont en décroissant, pourvu que les nombres u augmentent plus rapidement que les valeurs correspondantes de la fonction f.