Nouvelles annales de mathématiques

Geminiano Pirondini

Note géométrique

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 5 (1886), p. 460-480

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1886_3_5__460_1>

NOTE GÉOMÉTRIQUE;

PAR M. GEMINIANO PIRONDINI.

Soient h une ligne plane quelconque, h_1 sa développée, h_2 la développée de h_1, h_3 la développée de h_2, etc.; désignons par s, s_1, s_2, s_3, ... les arcs, par $d\varepsilon$, $d\varepsilon_1$, $d\varepsilon_2$,

$d\varepsilon_3, \ldots$ les angles de contingence, par $\rho, \rho_1, \rho_2, \rho_3, \ldots$ les rayons de courbure de ces lignes; on aura

$$ds_1 = d\rho, \qquad ds_2 = d\rho_1, \qquad ds_3 = d\rho_2. \qquad \ldots;$$

$$d\varepsilon = d\varepsilon_1 = d\varepsilon_2 = d\varepsilon_3 = \ldots;$$

$$\rho_1 = \frac{ds_1}{d\varepsilon_1} = \frac{d\rho}{d\varepsilon} = d\rho : \frac{ds}{\rho} = \rho\frac{d\rho}{ds},$$

$$\rho_2 = \rho_1\frac{d\rho_1}{ds_1} = \rho\frac{d\rho}{ds}\frac{d\rho_1}{d\rho} = \rho\frac{d\rho_1}{ds},$$

$$\rho_3 = \rho_2\frac{d\rho_2}{ds_2} = \rho\frac{d\rho_1}{ds}\frac{d\rho_2}{d\rho_1} = \rho\frac{d\rho_2}{ds},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Cela posé, si les lignes h, h_1 sont identiques et si le rayon ρ s'exprime en fonction de l'arc s, comme il suit

$$\rho = \varphi(s),$$

nous aurons

$$\rho_1 = \varphi(s_1).$$

Par conséquent,

$$\varphi(s_1) = \rho\frac{d\rho}{ds} = \varphi(s)\frac{d\,\varphi(s)}{ds};$$

mais

$$s_1 = \rho - \mathrm{K} = \varphi(s) - \mathrm{K} \qquad (\mathrm{K} = \text{const.});$$

donc

$$\varphi[\varphi(s) - \mathrm{K}] = \varphi(s)\frac{d\,\varphi(s)}{ds}, \tag{1}$$

où le premier membre indique le résultat de la substitution de la fonction $\varphi(s) - \mathrm{K}$ à la variable s dans la fonction $\varphi(s)$.

Réciproquement, si la fonction $\varphi(s)$ de l'arc s, exprimant le rayon de courbure d'une ligne h, vérifie l'équation (1), nous aurons, pour le rayon de courbure ρ_1 de h_1,

$$\rho_1 = \rho\frac{d\rho}{ds} = \varphi(s)\frac{d\,\varphi(s)}{ds} = \varphi[\varphi(s) - \mathrm{K}] = \varphi(\rho - \mathrm{K}) = \varphi(s_1),$$

c'est-à-dire que le rayon ρ_1 s'exprime en fonction de s_1

précisément comme ρ s'exprime en fonction de s : par conséquent, les lignes h, h_1 sont identiques.

On a donc le théorème :

Pour qu'une ligne plane h et sa développée h_1 soient identiques, il faut et il suffit que la fonction $\varphi(s)$ de l'arc exprimant le rayon de courbure de h vérifie l'équation (1).

Si la ligne h et sa seconde développée h_2 sont identiques, le rayon ρ_2 doit s'exprimer par s_2 précisément comme ρ s'exprime par s, c'est-à-dire

$$\rho = \varphi(s), \qquad \rho_2 = \varphi(s_2).$$

Or on a

$$\rho_2 = \frac{d\rho_1}{ds}\rho = \rho\frac{d}{ds}\left(\rho\frac{d\rho}{ds}\right) = \varphi(s)\frac{d}{ds}\left[\varphi(s)\frac{d\,\varphi(s)}{ds}\right]$$

et, d'ailleurs,

$$s_2 = \rho_1 - \mathrm{K} = \rho\frac{d\rho}{ds} - \mathrm{K} = \varphi(s)\frac{d\,\varphi(s)}{ds} - \mathrm{K}.$$

Donc :

Pour qu'une ligne plane h et sa seconde développée h_2 soient identiques, il est nécessaire et suffisant que la fonction $\varphi(s)$ de l'arc s, exprimant le rayon de courbure de h, vérifie l'équation

$$\varphi\left[\varphi(s)\frac{d\,\varphi(s)}{ds} - \mathrm{K}\right] = \varphi(s)\frac{d}{ds}\left[\varphi(s)\frac{d\,\varphi(s)}{ds}\right].$$

Si h est identique à sa troisième développée, la fonction $\varphi(s)$ doit vérifier l'équation

$$\varphi\left\{\varphi(s)\frac{d}{ds}\left[\varphi(s)\frac{d\,\varphi(s)}{ds}\right] - \mathrm{K}\right\}$$
$$= \varphi(s)\frac{d}{ds}\left\{\varphi(s)\frac{d}{ds}\left[\varphi(s)\frac{d\,\varphi(s)}{ds}\right]\right\}$$

. . . .

Avec un procédé analogue, on peut trouver aisément l'équation qui doit être vérifiée par la fonction $\varphi(s)$ pour que la n^{ieme} développée de h soit identique à la ligne primitive. Le premier membre de cette équation, si $\varphi(s)$ est une fonction algébrique de s du degré m, est du degré

$$(nm - n + 1)m,$$

tandis que le second membre est du degré

$$(n + 1)m - n.$$

On doit donc avoir

$$(nm - n + 1)m = (n + 1)m - n,$$

c'est-à-dire

$$n(m - 1)^2 = 0$$

ou bien

$$m = 1.$$

Donc :

Pour qu'une ligne plane h, dont le rayon de courbure est une fonction $\varphi(s)$ algébrique de l'arc s, soit identique à une de ses développées, il est nécessaire que $\varphi(s)$ ait une des formes suivantes

$$\varphi(s) = as + b,$$

où a et b sont des constantes;

$$\varphi(s) = \frac{P(s)}{Q(s)},$$

où $P(s)$, $Q(s)$ sont des polynômes du degré n, $n - 1$ respectivement;

$$\varphi(s) = \sqrt[n]{R(s)},$$

où $R(s)$ est un polynôme du degré $n - 1$.

Si

$$\varphi(s) = as + b,$$

on a

$$\varphi[\varphi(s)-\mathrm{K}]=a(as+b)-a\mathrm{K}+b,$$
$$\varphi(s)\frac{d\,\varphi(s)}{ds}=a(as+b),$$

et l'on rend toujours égales ces expressions en prenant $\mathrm{K}=\frac{b}{a}$; mais, parmi les lignes planes, les spirales logarithmiques seules ont leur rayon de courbure exprimable par une fonction linéaire de l'arc.

Donc :

Entre les lignes planes dont le rayon de courbure est exprimable par une fonction algébrique entière de l'arc, les spirales logarithmiques seules ont pour développées des lignes identiques aux primitives.

Il est clair, d'ailleurs, que toute spirale logarithmique jouit de cette propriété, puisque la développée d'une spirale logarithmique h est une nouvelle spirale logarithmique h_1 dont l'inclinaison i_1 sur les rayons vecteurs est la même que l'inclinaison i de h sur ses rayons vecteurs; conséquemment h, h_1 sont identiques.

Si

$$\varphi(s)=\sqrt{a+bs+cs^2},$$

la condition (1) devient

$$\sqrt{a+b(\sqrt{a+bs+cs^2}-\mathrm{K})+c(\sqrt{a+bs+cs^2}-\mathrm{K})^2}=\frac{b+2cs}{2},$$

c'est-à-dire

$$4c\mathrm{K}^2-4b\mathrm{K}+4a+4ac-b^2+4(b-2c\mathrm{K})\sqrt{a+bs+cs^2}=0.$$

Cette équation se dédouble comme il suit

$$b-2c\mathrm{K}=0,\qquad 4c\mathrm{K}^2-4b\mathrm{K}+4a+4ac-b^2=0.$$

La première nous donne $\mathrm{K}=\frac{b}{2c}$, et, si l'on porte cette valeur dans la seconde égalité, celle-ci devient

$$(1+c)(4ac-b^2)=0.$$

La condition $4ac-b^2=0$ exprime que le trinôme $a+bs+cs^2$ est un carré parfait, et l'on revient ainsi au cas de la spirale logarithmique. L'autre condition $1+c=0$ nous offre

$$\varphi(s)=\sqrt{a+bs-s^2}.$$

Je dis alors que la ligne h est une cycloïde. En effet, lorsque le rayon du cercle générateur de la cycloïde est R et que les axes coordonnés sont la tangente au sommet et l'axe de la ligne, on a

$$\rho=2\sqrt{4R^2-2Rx},\qquad s=2\sqrt{2Rx},$$

le sommet étant l'origine des arcs s.

Si l'on élimine x entre les deux égalités précédentes, on aura

$$\rho=\sqrt{16R^2-s^2}.$$

Prenons pour origine des arcs s le point P de la courbe, tel que l'arc compris entre P et le sommet soit d'une longueur h; on obtient alors de la précédente

$$\rho=\sqrt{16R^2-h^2+2hs-s^2}.$$

On voit donc que la fonction

$$\rho=\varphi(s)=\sqrt{a+bs-s^2}$$

correspond effectivement à une cycloïde dont le rayon du cercle générateur est $\frac{1}{8}\sqrt{4a+b^2}$; le point de la ligne, d'où l'on compte les arcs s, est à la distance $\frac{b}{2}$ du sommet.

On a donc le théorème :

Entre les lignes planes dont le rayon de courbure *est exprimable par une fonction de s de la forme $\sqrt{a + bs + cs^2}$, la cycloïde seule a pour développée une ligne identique à la primitive.*

Toute cycloïde a cette propriété.

On peut considérer une ligne courbe comme la limite d'une ligne polygonale dont le nombre des côtés augmente indéfiniment ; pour que deux lignes courbes h, h_1 soient semblables, il est donc nécessaire et suffisant que, entre les arcs élémentaires ds, ds_1 et les angles de contingence $d\varepsilon$, $d\varepsilon_1$ des deux lignes, subsistent les relations

$$ds = k\,ds, \qquad d\varepsilon = d\varepsilon_1$$

(k étant le rapport de similitude), ou bien les autres

$$\rho = k\rho_1, \qquad s = ks_1.$$

Supposons que les rayons de courbure ρ, ρ_1 s'expriment en fonction de s et de s_1, comme il suit :

$$\rho = \varphi(s), \qquad \rho_1 = \psi(s_1).$$

Si, dans la fonction $\psi(s_1)$, on change s_1 en $\frac{s}{k}$, on doit obtenir $\frac{1}{k}\rho$, c'est-à-dire $\frac{1}{k}\varphi(s)$, quel que soit s_1 ; cette condition est remplie lorsque

$$\psi(s_1) = \frac{1}{k}\varphi(ks_1).$$

Réciproquement, si

$$\rho = \varphi(s), \qquad \rho_1 = \frac{1}{k}\varphi(ks_1)$$

sont les rayons de courbure des lignes h, h_1, il est évident que, pour $s = a$, $s_1 = \frac{a}{k}$, on obtient

$$\rho = \varphi(a), \qquad \rho_1 = \frac{1}{k}\varphi(a) = \frac{1}{k}\rho,$$

ce qui prouve que les lignes h, h_1 sont semblables.

Donc :

Pour que deux lignes h, h_1 soient semblables, il faut et il suffit que les rayons de courbure ρ, ρ_1 s'expriment en fonction des arcs s, s_1 de ces lignes, comme il suit :

$$\rho = \varphi(s), \qquad \rho_1 = \frac{1}{k}\varphi(ks_1).$$

Si h est une spirale logarithmique,

$$\rho = as + b,$$

et nous aurons, pour le rayon ρ_1 d'une ligne h_1 semblable à h,

$$\rho_1 = \frac{1}{k}(mks_1 + n) = ms_1 + \frac{n}{k}.$$

La ligne h_1 est donc une spirale égale à la primitive, puisque les deux lignes h, h_1 ont la même inclinaison sur leurs rayons vecteurs.

Soient h, h_1 deux cycloïdes engendrées par des cercles de rayons R, R_1 ; prenons pour origine des arcs s, s_1 deux points P, P_1, tels que les arcs h, h_1 des lignes compris entre ces points et les sommets respectifs soient proportionnels aux rayons R, R_1. Alors

$$R_1 = \frac{R}{k}, \qquad h_1 = \frac{h}{k},$$

$$\rho = \sqrt{16R^2 - h^2 - 2hs - s^2},$$

$$\rho_1 = \sqrt{\frac{16R^2 - h^2}{k^2} + \frac{2h}{k}s_1 - s_1^2}$$

$$= \frac{1}{k}\sqrt{16R^2 - h^2 + 2h.ks_1 - (ks_1)^2}.$$

La condition de similitude est donc vérifiée.

Par conséquent :

Deux cycloïdes quelconques sont toujours semblables, *et le rapport de similitude est égal au rapport des rayons des cercles générateurs.*

Si la ligne h_1 est la développée de h, la condition de similitude entre h, h_1 devient

$$\frac{1}{m}\varphi(ms_1) = \varphi(s)\frac{d\,\varphi(s)}{ds};$$

mais

$$s_1 = \rho - \mathrm{K},$$

donc

$$\varphi\left\{m[\varphi(s) - \mathrm{K}]\right\} = m\,\varphi(s)\frac{d\,\varphi(s)}{ds}$$

ou bien

$$(2) \qquad \varphi[m\,\varphi(s) - n] = m\,\varphi(s)\frac{d\,\varphi(s)}{ds}.$$

Pour que la développée d'une ligne h soit une ligne h_1 semblable à la primitive, il faut et il suffit que la fonction $\varphi(s)$ de l'arc exprimant le rayon de courbure de h vérifie la relation (2).

Si h est semblable à la seconde développée h_2, on a

$$\varphi(ms_2) = m\,\varphi(s)\frac{d}{ds}\left[\varphi(s)\frac{d\,\varphi(s)}{ds}\right];$$

mais

$$s_2 = \rho_1 - \mathrm{K} = \rho\frac{d\rho}{ds} - \mathrm{K} = \varphi(s)\frac{d\,\varphi(s)}{ds} - \mathrm{K};$$

la fonction $\varphi(s)$ doit donc vérifier la relation

$$\varphi\left\{m\left[\varphi(s)\frac{d\,\varphi(s)}{ds} - \mathrm{K}\right]\right\} = m\,\varphi(s)\frac{d}{ds}\left[\varphi(s)\frac{d\,\varphi(s)}{ds}\right]$$

ou bien l'autre

$$\varphi\left[m\,\varphi(s)\frac{d\,\varphi(s)}{ds} - n\right] = m\,\varphi(s)\frac{d}{ds}\left[\varphi(s)\frac{d\,\varphi(s)}{ds}\right].$$

On trouverait pareillement les conditions pour que la ligne primitive h soit semblable à la troisième, à la quatrième, ... développée.

Si h_1 est la ligne enveloppée par les droites qui font le même angle θ avec les tangentes d'une ligne plane h, les coordonnées x_1, y_1 d'un point quelconque A_1 de h_1 sont liées aux coordonnées x, y du point correspondant A de h par les équations suivantes

$$x_1 = x + \rho(\cos\theta\cos\alpha + \sin\theta\cos\lambda)\sin\theta,$$
$$y_1 = y + \rho(\cos\theta\cos\beta + \sin\theta\cos\mu)\sin\theta,$$

où ρ est le rayon de courbure de h, $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\lambda$, $\cos\mu$ sont les cosinus directeurs de la tangente et de la normale principale de h. Si s, s_1 sont les arcs de h, h_1, on déduit des égalités précédentes (en appliquant aussi les formules connues de J.-A. Serret)

$$\frac{dx_1}{ds_1}\frac{ds_1}{ds} = \left(\cos\theta + \frac{d\rho}{ds}\sin\theta\right)(\cos\theta\cos\alpha + \sin\theta\cos\lambda),$$
$$\frac{dy_1}{ds_1}\frac{ds_1}{ds} = \left(\cos\theta + \frac{d\rho}{ds}\sin\theta\right)(\cos\theta\cos\beta + \sin\theta\cos\mu);$$

d'où l'on tire

$$ds_1 = \left(\cos\theta + \frac{d\rho}{ds}\sin\theta\right)ds$$

et, par conséquent,

$$\frac{dx_1}{ds_1} = \cos\theta\cos\alpha + \sin\theta\cos\lambda,$$
$$\frac{dy_1}{ds_1} = \cos\theta\cos\beta + \sin\theta\cos\mu.$$

Puisque ces égalités nous offrent

$$\frac{d^2x_1}{ds_1^2} = \frac{\cos\theta\cos\lambda - \sin\theta\cos\alpha}{\rho\left(\cos\theta + \frac{d\rho}{ds}\sin\theta\right)},$$
$$\frac{d^2y_1}{ds_1^2} = \frac{\cos\theta\cos\mu - \sin\theta\cos\beta}{\rho\left(\cos\theta + \frac{d\rho}{ds}\sin\theta\right)},$$

le rayon de courbure ρ_1 de h_1 aura pour expression

$$\rho_1 = \frac{1}{\sqrt{\sum\left(\frac{d^2x_1}{ds_1^2}\right)^2}} = \rho\left(\cos\theta + \frac{d\rho}{ds}\sin\theta\right).$$

La ligne h_1 sera donc semblable à la ligne h lorsque la fonction $\varphi(s)$ de l'arc s, exprimant le rayon de courbure de h, vérifiera l'équation

$$\varphi\{m[s\cos\theta + \varphi(s)\sin\theta - \mathrm{K}]\} = m\left[\cos\theta + \frac{d\,\varphi(s)}{ds}\sin\theta\right]\varphi(s).$$

Les lignes h, h_1 seront égales lorsqu'on aura

$$\varphi[s\cos\theta + \varphi(s)\sin\theta - \mathrm{K}] = \left[\cos\theta + \frac{d\,\varphi(s)}{ds}\sin\theta\right]\varphi(s).$$

Si, par exemple, h est une spirale logarithmique,

$$\rho = as + b;$$

par conséquent,

$$\begin{aligned}\varphi[s\cos\theta + \varphi(s)\sin\theta - \mathrm{K}]\\ = a(\cos\theta + a\sin\theta)s + a(b\sin\theta - \mathrm{K}) + b,\end{aligned}$$

$$\cos\theta + \frac{d\,\varphi(s)}{ds}\sin\theta = a(\cos\theta + a\sin\theta)s + b(\cos\theta + a\sin\theta).$$

La condition d'égalité des courbes h, h_1 devient

$$a(b\sin\theta - \mathrm{K}) + b = b(\cos\theta + a\sin\theta),$$

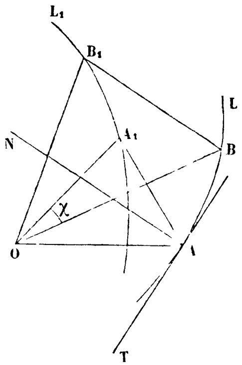
que l'on peut toujours vérifier en prenant

$$\mathrm{K} = \frac{b(1-\cos\theta)}{a}.$$

Si donc la ligne h est une spirale logarithmique, la ligne h_1, enveloppée par les droites qui font un angle constant avec les tangentes de h, est une nouvelle spirale identique à la primitive.

Les spirales logarithmiques égales h, h_1 ont le même pôle O; on obtient donc h_1 dans sa position en faisant tourner h d'un certain angle convenable χ autour de O. Nous allons déterminer cet angle χ.

Fig. 1.



Si l'on désigne par i l'inclinaison constante des lignes h, h_1 sur leurs rayons vecteurs, on a

$$\rho = as + b = s \cot i + b.$$

Soient (A, A_1), (B, B_1) deux couples de points correspondants sur les lignes h, h_1; si l'on suppose B choisi, de manière que

$$BB_1 = AA_1 \frac{\sin(i + \theta)}{\sin i},$$

on obtient, pour le rayon de courbure $(\rho_1)_{A_1}$ de h_1 au point A_1,

$$(\rho_1)_{A_1} = (\cos\theta + \sin\theta \cot i)\rho_A = AA_1 \frac{\sin(i + \theta)}{\sin i}.$$

Les rayons de courbure des lignes h, h_1 en B et A_1 sont donc égaux; par conséquent, B et A_1 sont, sur les lignes égales h, h_1, correspondants; on aura donc

$$\chi = \widehat{BOA_1}.$$

Si ω_1, ω_2 sont les angles polaires relatifs aux points A, B de h, et si R_0 est le rayon vecteur initial, on a

$$OA = R_0 e^{\omega_1 \cot i}, \qquad OB = R_0 e^{\omega_2 \cot i},$$

d'où l'on tire

$$\frac{OB}{OA} = e^{(\omega_2 - \omega_1)\cot i} = e^{\widehat{AOB} \cot i}.$$

Je dis que les triangles OAA_1, OBB_1, ... sont semblables; en effet, dans le triangle OAA_1, l'angle $\widehat{OA_1A}$ est l'inclinaison de la spirale h_1 sur ses rayons vecteurs; donc

$$\widehat{OA_1A} = i.$$

Pour évaluer l'angle $\widehat{OAA_1}$, conduisons la normale AN et la tangente AT à la ligne h; nous aurons

$$\widehat{A_1AN} = \widehat{A_1AT} - \widehat{NAT} = \theta - \frac{\pi}{2},$$

$$\widehat{NAO} = \widehat{NAT} - \widehat{OAT} = \frac{\pi}{2} - i,$$

d'où

$$\widehat{A_1AO} = \widehat{A_1AN} + \widehat{NAO} = \theta - i.$$

Le triangle OAA_1 reste donc toujours semblable à soi-même lorsque les points correspondants A, A_1 se déplacent sur les lignes respectives. Par conséquent,

$$\frac{OB}{OA} = \frac{BB_1}{AA_1} = \frac{\sin(i+\theta)}{\sin i},$$

c'est-à-dire

$$\frac{\sin(i+\theta)}{\sin i} = e^{\widehat{AOB}\cot i},$$

d'où

$$\widehat{AOB} = \operatorname{tang} i \left[\log \frac{\sin(i+\theta)}{\sin i}\right].$$

Dans le triangle AOA_1, on a, pour le troisième angle $\widehat{AOA_1}$,

$$\widehat{AOA_1} = \pi - \left(\widehat{OAA_1} + \widehat{OA_1A}\right) = \pi - \theta;$$

donc

$$\begin{aligned} \chi = \widehat{BOA_1} &= \widehat{AOA_1} - \widehat{AOB} \\ &= \pi - \theta - \left[\log \frac{\sin(i+\theta)}{\sin i}\right] \operatorname{tang} i. \end{aligned}$$

On a ainsi le théorème :

On obtient la spirale logarithmique h_1 dans sa position, en faisant tourner la spirale h autour de son pôle, et dans la direction des rayons vecteurs croissants, d'un angle

$$\chi = \pi - \theta + \left[\log \frac{\sin i}{\sin(i+\theta)}\right] \operatorname{tang} i.$$

Si $\theta = \frac{\pi}{2}$, la ligne h_1 est la développée de h, et l'angle χ est alors déterminé par l'égalité

$$\chi = \frac{\pi}{2} + (\log \operatorname{tang} i) \operatorname{tang} i.$$

Lorsque $i = 45^\circ$, χ est un angle droit.

Si l'angle i vérifie la relation

$$\frac{\pi}{2} + (\log \operatorname{tang} i) \operatorname{tang} i = 0,$$

la développée h_1 de la spirale h est la spirale même. En faisant alors rouler, sans glissement, le plan de la courbe sur une surface développable quelconque, on obtient une surface moulure de Monge, qui contient tous les centres de courbure d'un système. Une telle surface a été mentionnée par Binet (*Journal de Liouville*, 1^re^ série, t. VI).

Si h_1 est la développée d'une spirale logarithmique, h_2 celle de h_1, h_3 celle de h_2, ..., on obtient les lignes égales h, h_1, h_2, h_3, ... par des rotations de h autour de son pôle. Lorsque l'angle i vérifie la relation

$$a\left[\frac{\pi}{2} + (\log \operatorname{tang} i) \operatorname{tang} i\right] = 2b\pi$$

ou bien l'autre

$$(\log \operatorname{tang} i) \operatorname{tang} i = \frac{4b-a}{2a}\pi,$$

a et b étant des nombres entiers, les lignes h, h_1, h_2, ... forment un système fermé, composé de a spirales logarithmiques égales entre elles; une ligne quelconque h_n du système a pour développée la ligne successive h_{n+1}, la dernière ligne a pour développée la primitive h. Si l'on fait rouler, sans glissement, le plan des lignes sur une surface développable quelconque, chaque spirale engendre une surface moulure de Monge. On obtient donc un système fermé, composé de a surfaces moulures, dont chacune a pour une de ses développées la surface moulure suivante.

Soit h_1 une ligne parallèle à la ligne h; si h est la distance constante entre deux points correspondants de h, h_1, et que (ρ, s), (ρ_1, s_1) sont le rayon de courbure et l'arc de h, h_1, nous aurons

$$\rho_1 = \rho + h, \qquad ds_1 = ds + h\frac{ds}{\rho},$$

d'où l'on tire

$$s_1 = \mathrm{K} + s + h\int\frac{ds}{\rho} \qquad (\mathrm{K} = \text{const.}).$$

Si $\rho = \varphi(s)$, la ligne h_1 sera égale à la ligne h lorsque $\rho_1 = \varphi(s_1)$, c'est-à-dire lorsque la fonction $\varphi(s)$, exprimant le rayon de courbure de h vérifie l'équation

$$h + \varphi(s) = \varphi\left[\mathrm{K} + s + h\int\frac{ds}{\varphi(s)}\right].$$

Exemple. — Si l'on suppose

$$\varphi(s) = \sqrt{as+b},$$

on a

$$h + \varphi(s) = h + \sqrt{as+b},$$

$$\varphi\left[K + s + h\int\frac{ds}{\varphi(s)}\right] = \sqrt{a\left(K + s + \frac{2h}{a}\sqrt{as+b}\right) + b}.$$

La condition d'égalité des lignes h, h_1 devient alors

$$h^2 + as + b + 2h\sqrt{as+b} = a\left(K + s + \frac{2h}{a}\sqrt{as+b}\right) + b,$$

qu'on peut toujours vérifier, quelle que soit h, en prenant

$$K = \frac{h^2}{a}.$$

On conclut que la ligne, dans laquelle $\rho = \sqrt{as+b}$, est identique à toutes ses parallèles.

On voit aisément que la ligne h est une développante d'un cercle de rayon $\frac{a}{2}$; en effet, la relation $\rho_1 = \rho\,\frac{d\rho}{ds}$ entre le rayon de courbure ρ d'une ligne et le rayon de courbure ρ_1 de sa développée nous donne

$$\rho_1 = \frac{a}{2}.$$

Une ligne sphérique est complètement déterminée lorsque son rayon de courbure géodésique R est donné en fonction de l'arc s. En effet, entre le rayon de courbure géodésique R et le rayon de courbure absolue ρ d'une ligne placée sur une sphère de rayon h subsiste la relation

$$\frac{1}{\rho} = \sqrt{\frac{1}{h^2} + \frac{1}{R^2}}.$$

D'ailleurs, si r est le rayon de torsion de la ligne sphérique, on a aussi

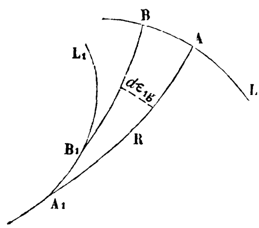
$$h^2 = \rho^2 + r^2 \left(\frac{d\rho}{ds}\right)^2,$$

d'où l'on tire

$$r = \frac{\sqrt{h^2 - \rho^2}}{\frac{d\rho}{ds}}.$$

Si donc R est une fonction connue de l'arc s, on aura

Fig. 2.



aussi ρ et r en fonction de s; par conséquent, la ligne est complètement déterminée.

Comment le rayon de courbure géodésique R d'une ligne sphérique h doit-il être exprimé en fonction de l'arc s, pour que la développée sphérique h_1 de h soit identique à la ligne primitive?

Nous allons résoudre cette question.

Considérons deux points consécutifs A, B de h, et soient A_1, B_1 les correspondants de h_1; les arcs de grand cercle AA_1, BB_1 forment entre eux un angle infinitésimal, l'angle de contingence géodésique $d\varepsilon_{1g}$ de h_1 en A_1. Or on a

$$AB = h \sin\left(\frac{AA_1}{h}\right) d\varepsilon_{1g},$$

ou bien

$$ds = h \sin\left(\frac{R}{h}\right) d\varepsilon_{1g};$$

d'ailleurs,

$$ds_1 = dR.$$

Le rayon de courbure géodésique R_1 de h_1 est donc déterminé par la formule

$$R_1 = \frac{ds_1}{d\varepsilon_{1g}} = h\frac{dR}{ds}\sin\left(\frac{R}{h}\right).$$

Si

$$R = \varphi(s),$$

pour que h_1 soit identique à h, il faut et il suffit que soit vérifiée la condition

$$R_1 = \varphi(s_1)$$

ou bien l'autre

$$\varphi(s_1) = h\frac{d\,\varphi(s)}{ds}\sin\left[\frac{\varphi(s)}{h}\right];$$

mais

$$s_1 = R - K = \varphi(s) - K,$$

donc

$$\varphi[\varphi(s) - K] = h\frac{d\,\varphi(s)}{ds}\sin\left[\frac{\varphi(s)}{h}\right], \tag{3}$$

c'est-à-dire :

La condition nécessaire et suffisante, pour que la développée sphérique d'une ligne placée sur une sphère de rayon h soit identique à la ligne primitive, est que la fonction $\varphi(s)$ *de l'arc, exprimant le rayon de courbure géodésique de la ligne, vérifie la relation* (3).

On peut aisément établir la condition pour que h soit identique à la seconde développée sphérique; en effet, on a

$$\begin{aligned} R_2 &= h\frac{dR_1}{ds_1}\sin\left(\frac{R_1}{h}\right) \\ &= h^2\frac{d\left[\frac{dR}{ds}\sin\left(\frac{R}{h}\right)\right]}{dR}\sin\left[\frac{dR}{ds}\sin\left(\frac{R}{h}\right)\right]. \end{aligned}$$

Le premier membre R_2 doit être formé par s_2 comme R l'est par s; conséquemment, si $R = \varphi(s)$,

$$R_2 = \varphi(s_2) = \varphi(R_1 - K) = \varphi\left[h\frac{dR}{ds}\sin\left(\frac{R}{h}\right) - K\right].$$

La condition demandée est donc la suivante :

$$\varphi\left\{h\frac{d\,\varphi(s)}{ds}\sin\left[\frac{\varphi(s)}{h}\right] - K\right\}$$
$$= h^2\frac{d\left\{\frac{d\,\varphi(s)}{ds}\sin\left[\frac{\varphi(s)}{h}\right]\right\}}{dR}\sin\left\{\frac{d\,\varphi(s)}{ds}\sin\left[\frac{\varphi(s)}{h}\right]\right\}.$$

On pourrait trouver aisément la condition qui doit être remplie par la fonction $\varphi(s)$ pour que la ligne sphérique h soit égale à la troisième, à la quatrième, ... développée sphérique.

Je vais enfin démontrer un théorème constituant une généralisation du théorème bien connu de Joachimsthal sur les lignes de courbure planes d'une surface.

Soient u, v les paramètres des lignes de courbure d'une surface quelconque S, et soit S_1 la développée de S par rapport aux lignes $u =$ const. Sur la surface S_1 les lignes $u =$ const. sont des géodésiques, et les tangentes aux courbes $v =$ const. le long d'une même ligne h_1 du système $u =$ const. forment la surface développable polaire Σ de la ligne correspondante h de S. Désignons par ω l'angle formé par les courbes u, v sur la surface S_1 et par φ l'angle que la binormale de h forme avec la normale à la surface S au même point; nous aurons

$$\omega = \varphi;$$

d'où l'on tire, en désignant par s l'arc de h,

$$\frac{\partial\omega}{\partial u}du = \frac{\partial\varphi}{\partial u}du = \frac{\partial\varphi}{\partial s}ds.$$

Or $\frac{\partial\omega}{\partial u}du$ étant l'angle formé par deux génératrices consécutives de Σ, c'est-à-dire l'angle de contingence de l'arête de rebroussement de Σ, est aussi l'angle de torsion $\frac{ds}{T}$ de h. On a donc

$$\frac{ds}{T} = \frac{\partial\varphi}{\partial s} ds;$$

d'où

$$\frac{1}{T} = \frac{\partial\varphi}{\partial s}.$$

Soit, réciproquement, h une telle ligne d'une surface S, que, entre l'angle φ formé par la binormale de h avec la normale à S au même point, subsiste la relation précédente. Je dis alors que h est, sur la surface S, une ligne de courbure.

En effet, soit S_0 une surface dont h est une de ses lignes de courbure; si l'on désigne par φ_0 l'angle que la binormale de h forme avec la normale de S_0, on aura

$$\frac{1}{T} = \frac{\partial\varphi_0}{\partial s}.$$

Par conséquent,

$$\frac{\partial\varphi_0}{\partial s} = \frac{\partial\varphi}{\partial s},$$

d'où l'on tire

$$\varphi_0 - \varphi = \text{const}.$$

Cette égalité démontre que les normales à la surface S le long de h forment une surface développable; h est donc une ligne de courbure de S.

On a donc le théorème :

La condition nécessaire et suffisante, pour qu'une ligne h d'une surface soit ligne de courbure, est que la différentielle de l'angle que la binormale de h forme avec la normale à la surface soit égal à l'angle de torsion de h.

Lorsque h est plane,

$$\frac{1}{T} = 0,$$

et l'on obtient le théorème de Joachimsthal.

Si l'on suppose que la torsion de h soit constante, on aura

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s} = \frac{1}{T} = a,$$

d'où

$$\varphi = as + b.$$

L'angle φ est donc une fonction linéaire de l'arc de la ligne.

Le théorème précédent peut être énoncé comme il suit :

Si l'on fait tourner les binormales d'une ligne à double courbure dans les plans normaux, autour des points de la courbe, d'un angle dont la différentielle soit égale à l'angle de torsion de la ligne, on obtient une surface développable.