Correspondance

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 5 (1886), p. 47-52

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1886_3_5__47_1>

CORRESPONDANCE.

Extrait d'une Lettre de M. le Dr Louis Saalschütz, professeur extraord. de l'Université de Königsberg.

Dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques*, t. IV, 3e série, p. 57, se trouve un petit Mémoire de M. Hermite sur une identité trigonométrique, dans lequel le grand analyste démontre un résultat de M. Glaisher en lui donnant en même temps une plus grande extension. Mais la formule employée par M. Hermite, dont l'origine est due à Cauchy, permet d'ajouter une autre relation trigonométrique encore inconnue, comme je le crois.

Soit donc

$$(1)\qquad f(x)=\frac{\sin(x-b_1)\sin(x-b_2)\ldots\sin(x-b_n)}{\sin(x-a_1)\sin(x-a_2)\ldots\sin(x-a_n)};$$

d'où l'on tire, en faisant $\xi = e^{ix}$, $\xi^2 = t$,

$$(2)\quad f(x)=F(t)=\frac{(te^{-b_1i}-e^{b_1i})(te^{-b_2i}-e^{b_2i})\ldots(te^{-b_ni}-e^{b_ni})}{(te^{-a_1i}-e^{a_1i})(te^{-a_2i}-e^{a_2i})\ldots(te^{-a_ni}-e^{a_ni})}.$$

Maintenant la formule connue de Cauchy énonce

$$(3)\qquad F(t)=\sum \text{rés}\,\frac{F(z)}{t-z}+\frac{1}{2\pi i}\int\frac{F(z)}{z-t}\,dz,$$

l'intégrale prise autour d'une assez grande partie du plan enfermant au moins tous les points où $F(z)$ devient infini et dont la circonférence est fermée par une courbe quelconque. Mais, si nous posons

$$e^{2a_1i}=\alpha_1,\qquad e^{2a_2i}=\alpha_2,\qquad \ldots,\qquad e^{2a_ni}=\alpha_n,$$

nous pouvons écrire

$$(4)\quad \frac{F(z)}{z-t}=\frac{(ze^{-b_1i}-e^{b_1i})(ze^{-b_2i}-e^{b_2i})\ldots(ze^{-b_ni}-e^{b_ni})}{(z-t)(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\ldots(z-\alpha_n)\,e^{-(a_1+a_2+\ldots+a_n)i}},$$

et le résidu de cette fonction correspondant au pôle $z=\alpha_1$, c'est-à-dire le coefficient de $\frac{1}{z-\alpha_1}$ près de $z=\alpha_1$, se trouve

$$=\frac{(\alpha_1e^{-b_1i}-e^{b_1i})(\alpha_1e^{-b_2i}-e^{b_2i})\ldots(\alpha_1e^{-b_ni}-e^{b_ni})}{(\alpha_1-t)(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_3)\ldots(\alpha_1-\alpha_n)\,e^{-(a_1+a_2+\ldots+a_n)i}}$$

ou, en multipliant le numérateur et le dénominateur par $e^{-na_1 t}$,

$$(5)\left\{\begin{aligned}&=\frac{(e^{(a_1-b_1)t}-e^{-(a_1-b_1)t})\ldots(e^{(a_1-b_n)t}-e^{-(a_1-b_n)t})}{(\alpha_1-t)(e^{(a_1-a_2)t}-e^{-(a_1-a_2)t})\ldots(e^{(a_1-a_n)t}-e^{-(a_1-a_n)t})e^{-2a_1 t}},\\&=\frac{\sin(a_1-b_1)\sin(a_1-b_2)\ldots\sin(a_1-b_n)}{\sin(a_1-a_2)\sin(a_1-a_3)\ldots\sin(a_1-a_n)}\,\frac{2i\alpha}{\alpha_1-t}.\end{aligned}\right.$$

En conséquence de cette expression et des expressions pareilles pour α_2, α_3, ..., α_n, on trouve la somme des résidus de $\frac{F(z)}{t-z}$, si l'on désigne, pour abréger,

$$\frac{\sin(a_1-b_1)\sin(a_2-b_2)\ldots\sin(a_1-b_n)}{\sin(a_1-a_2)\sin(a_1-a_3)\ldots\sin(a_1-a_n)} \quad \text{par} \quad A_1,$$

$$\frac{\sin(a_2-b_1)\sin(a_2-b_2)\ldots\sin(a_2-b_n)}{\sin(a_2-a_1)\sin(a_2-a_3)\ldots\sin(a_2-a_n)} \quad \text{par} \quad A_2,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \ldots \quad \ldots;$$

$$(6)\quad \sum \text{res}\,\frac{F(z)}{t-z}=-2i\left(\frac{A_1\alpha_1}{\alpha_1-t}+\frac{A_2\alpha_2}{\alpha_2-t}+\ldots+\frac{A_n\alpha_n}{\alpha_n-t}\right).$$

Considérons maintenant l'intégrale de la formule (3)

$$Y=\int\frac{F(z)}{z-t}dz.$$

Par la substitution qui suppose la circonférence comme cercle

$$z=Re^{i\varphi},$$

et, en prenant R très grand, il résulte de la formule (2)

$$F(z)=\frac{e^{-(b_1+b_2+\ldots+b_n)t}}{e^{-(a_1+a_2+\ldots+a_n)t}}=e^{(a_1+a_2+\ldots+a_n-b_1-b_2-\ldots-b_n)t},$$

et, puisque la quantité t peut être supprimée en face de z, on a

$$\frac{dz}{z}=i\,d\varphi,$$

et, par là, en intégrant autour du cercle ayant le rayon R,

$$(7)\qquad Y=\int_0^{2\pi}\frac{F(z)\,dz}{z}=2i\pi[\cos(s)+i\sin(s)],$$

où s est écrit au lieu de

$$(a_1+a_2+\ldots+a_n-b_1-b_2-\ldots-b_n).$$

En combinant les formules (6) et (7), nous recevons de (3)

$$(8)\quad\left\{\begin{aligned}F(t)=-2i\left(\frac{A_1\alpha_1}{\alpha_1-t}+\frac{A_2\alpha_2}{\alpha_2-t}+\ldots+\frac{A_n\alpha_n}{\alpha_n-t}\right)\\+\cos(s)+i\sin(s).\end{aligned}\right.$$

Mais

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_1-t}=\frac{e^{2a_1i}}{e^{2a_1i}-e^{2xi}};$$

d'où l'on conclut facilement, en multipliant le numérateur et le dénominateur par $(e^{-2a_1i}-e^{-2xi})$,

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_1-t}=\frac{1}{2}[1-i\cot(a_1-x)],$$

de même

$$\frac{\alpha_2}{\alpha_2-t}=\frac{1}{2}[1-i\cot(a_2-x)],\qquad\ldots.$$

Par cela, il vient de (7)

$$(9)\quad\left\{\begin{aligned}F(t)=f(x)=-A_1\cot(a_1-x)-A_2\cot(a_2-x)-\ldots\\-A_n\cot(a_n-x)+\cos(s)\\-i[A_1+A_2+\ldots+A_n-\sin(s)];\end{aligned}\right.$$

ce qui donne, si l'on sépare ce qui est réel de ce qui est imaginaire,

$$(10)\quad\left\{\begin{aligned}\frac{\sin(a_1-b_1)\sin(a_1-b_2)\ldots\sin(a_1-b_n)}{\sin(a_1-a_2)\sin(a_1-a_3)\ldots\sin(a_1-a_n)}+\ldots\\+\frac{\sin(a_n-b_1)\sin(a_n-b_2)\ldots\sin(a_n-b_n)}{\sin(a_n-a_1)\sin(a_n-a_2)\ldots\sin(a_n-a_{n-1})}\\=\sin(a_1+a_2+\ldots+a_n-b_1-b_2-\ldots-b_n),\end{aligned}\right.$$

ce qui est la formule de M. Hermite, et encore

$$(11)\quad \left\{\begin{aligned}&\frac{\sin(x-b_1)\sin(x-b_2)\ldots\sin(x-b_n)}{\sin(x-a_1)\sin(x-a_2)\ldots\sin(x-a_n)}\\ &\quad=\frac{\sin(a_1-b_1)\ldots\sin(a_1-b_n)}{\sin(a_1-a_2)\ldots\sin(a_1-a_n)}\cot(x-a_1)\\ &\quad+\frac{\sin(a_2-b_1)\ldots\sin(a_2-b_n)}{\sin(a_2-a_1)\ldots\sin(a_2-a_n)}\cot(x-a_2)\\ &\quad+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &\quad+\frac{\sin(a_n-b_1)\ldots\sin(a_n-b_n)}{\sin(a_n-a_1)\ldots\sin(a_n-a_{n-1})}\cot(x-a_n)\\ &\quad+\cos(a_1+a_2+\ldots+a_n-b_1-b_2-\ldots-b_n),\end{aligned}\right.$$

ce qui est la formule annoncée.

Soient, pour spécialiser cette formule (11),

$$b_1=a_1+\frac{\pi}{2},\quad b_2=a_2+\frac{\pi}{2},\quad \ldots,\quad b_n=a_n+\frac{\pi}{2}.$$

Alors d'elle sortira

$$\begin{aligned}&(-1)^n\cot(x-a_1)\ldots\cot(x-a_n)\\ &\quad=(-1)^n[\cot(a_1-a_2)\ldots\cot(a_1-a_n)\cot(x-a_1)+\ldots\\ &\quad\quad+\cot(a_n-a_1)\ldots\cot(a_n-a_{n-1})\cot(x-a_n)]+\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right)\end{aligned}$$

ou, en faisant $x=a_0$,

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned}&\cot(a_0-a_1)\cot(a_0-a_2)\ldots\cot(a_0-a_n)\\ &\quad+\cot(a_1-a_0)\cot(a_1-a_2)\ldots\cot(a_1-a_n)+\ldots\\ &\quad+\cot(a_n-a_0)\cot(a_n-a_1)\ldots\cot(a_n-a_{n-1})=\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)(-1)_n,\end{aligned}\right.$$

c'est-à-dire

$$=\left\{\begin{array}{l}0\ \text{si } n \text{ est impair},\\ (-1)^{\frac{n}{2}}\ \text{si } n \text{ est pair}.\end{array}\right.$$

Mettons, dans la formule (11), $\frac{\pi}{2}-x$ au lieu de x;

alors nous aurons

$$(13)\left\{\begin{aligned}
&\frac{\cos(x+b_1)\cos(x+b_2)\ldots\cos(x+b_n)}{\cos(x+a_1)\cos(x+a_2)\ldots\cos(x+a_n)}\\
&\quad=\frac{\sin(a_1-b_1)\ldots\sin(a_1-b_n)}{\sin(a_1-a_2)\ldots\sin(a_1-a_n)}\operatorname{tang}(x+a_1)\\
&\quad+\frac{\sin(a_2-b_1)\ldots\sin(a_2-b_n)}{\sin(a_2-a_1)\ldots\sin(a_2-a_n)}\operatorname{tang}(x+a_2)\\
&\quad+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\quad+\frac{\sin(a_n-b_1)\ldots\sin(a_n-b_n)}{\sin(a_n-a_1)\ldots\sin(a_n-a_{n-1})}\operatorname{tang}(x+a_n)\\
&\quad+\cos(a_1+a_2+\ldots+a_n-b_1-b_2-\ldots-b_n).
\end{aligned}\right.$$

Si nous écrivons enfin, dans cette formule, $\frac{x}{r}$, $\frac{a_1}{r}$, $\frac{a_2}{r}$, ..., $\frac{b_1}{r}$, $\frac{b_2}{r}$, ... pour x, a_1, a_2, ..., b_1, b_2, ..., le nombre r croissant jusqu'à l'infini, elle produira

$$(14)\left\{\begin{aligned}
&\frac{(a_1-b_2)(a_1-b_3)\ldots(a_1-b_n)}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)\ldots(a_1-a_n)}(a_1-b_1)(a_1+x)\\
&\quad+\frac{(a_2-b_1)(a_2-b_3)\ldots(a_2-b_n)}{(a_2-a_1)(a_2-a_3)\ldots(a_2-a_n)}(a_2-b_2)(a_2+x)+\ldots\\
&\quad+\frac{(a_n-b_1)(a_n-b_2)\ldots(a_n-b_{n-1})}{(a_n-a_1)(a_n-a_2)\ldots(a_n-a_{n-1})}(a_n-b_n)(a_n-x)\\
&=\frac{1}{2}\Big\{(a_1-b_1)(a_1-b_1+2x)\\
&\quad+(a_2-b_2)(a_2+b_2-2)\\
&\quad+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\quad+(a_n-b_n)(a_n+b_n-2x)\\
&\quad+[(a_1-b_1)+(a_2-b_2)+\ldots+(a_n-b_n)]^2\Big\}.
\end{aligned}\right.$$

Voilà une formule algébrique qui contient deux relations en comparant les coefficients de x^0 et de x. En appliquant la même méthode aux formules (11) et (12), il en sortira des identités eulériennes très connues.