MANGEOT

Note sur l'hyperboloïde

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 5 (1886), p. 480-483

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1886_3_5__480_1>

NOTE SUR L'HYPERBOLOÏDE;

PAR M. MANGEOT,
Professeur de Mathématiques spéciales au lycée de Troyes.

On peut déduire de la théorie des invariants quelques propriétés des génératrices de l'hyperboloïde à une nappe.

Concevons que l'on construise un parallélépipède P sur trois génératrices quelconques de même système, en faisant passer par chacune d'elles un plan parallèle aux deux autres. Appelons 2α, 2β, 2γ les longueurs de ses arêtes, et S, S' ses deux sommets non situés sur l'hyperboloïde. Menons par le centre O de la surface les parallèles Ox, Oy, Oz aux trois génératrices considérées, dans des directions telles que le trièdre $Oxyz$ comprenne dans son intérieur l'un des points S, S'.

L'hyperboloïde est représenté par l'équation

$$\frac{yz}{\beta\gamma} + \frac{zx}{\gamma\alpha} + \frac{xy}{\alpha\beta} + 1 = 0$$

relativement aux axes Ox, Oy, Oz, et par l'équation

$$-\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} + \frac{Z^2}{c^2} + 1 = 0$$

relativement à ses axes de symétrie.

En appliquant les théorèmes sur les invariants à ces deux équations, on obtient les relations

$$\alpha\beta\gamma\sqrt{D} = \tfrac{1}{2}abc, \tag{1}$$

$$2(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) - \rho^2 = a^2 + b^2 - c^2, \tag{2}$$

$$\Sigma 2\alpha(\cos\lambda - \cos\mu\cos\nu) = abc\sqrt{D}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2}\right), \tag{3}$$

où l'on a posé

$$\lambda = \widehat{yOz}, \quad \mu = \widehat{zOx}, \quad \nu = \widehat{xOy},$$
$$D = 1 - \cos^2\lambda - \cos^2\mu - \cos^2\nu + 2\cos\lambda\cos\mu\cos\nu,$$
$$\rho^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2\beta\gamma\cos\lambda + 2\gamma\alpha\cos\mu + 2\alpha\beta\cos\nu.$$

La relation (1) exprime que le volume du parallélépipède P, construit sur trois génératrices quelconques de l'hyperboloïde, est constant et égal à la moitié du volume du parallélépipède construit sur ses axes $2a$, $2b$, $2c$.

La formule (2) traduit cette propriété des hexagones gauches, à côtés opposés parallèles, que l'on peut placer sur l'hyperboloïde :

La somme des carrés des six côtés de l'hexagone, diminuée du carré de la distance SS' des deux points où concourent les plans de ses six angles, est constante et égale à la somme algébrique des carrés des axes de l'hyperboloïde.

Quant à la relation (3), dans laquelle le coefficient $\cos\lambda - \cos\mu \cos\nu$ de 2α représente la projection sur Oy (ou sur Oz) d'une longueur que l'on sait construire ([1]), elle peut s'interpréter de la manière suivante :

Soient SA, SB, SC les trois arêtes du parallélépipède P qui partent d'un sommet S non situé sur l'hyperboloïde. Dans le plan ASB de deux arêtes, menons à l'une d'elles, SA, une perpendiculaire ST_a dirigée du même côté que la seconde arête SB, et prenons sur cette perpendiculaire une longueur ST_a égale à la distance du sommet A à la droite SB; puis projetons cette longueur ST_a sur la troisième arête SC. Cette projection, ajoutée aux deux projections analogues relatives aux points B, C, donne une somme qui est proportionnelle au volume du parallélépipède construit sur les droites SA, SB, SC, avec des longueurs d'arêtes égales à a, b, c. Le coefficient de proportionnalité est

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2}.$$

Examinons deux cas particuliers:

1° $$\lambda = \mu = \frac{\pi}{2}.$$

Les relations (2) et (3) deviennent

$$(\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta\cos\nu) + \gamma^2 = a^2 + b^2 - c^2,$$
$$2\gamma = \operatorname{tang}\nu\left(\frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} - \frac{ab}{c}\right).$$

([1]) Se reporter à la démonstration des formules fondamentales de la Trigonométrie sphérique.

La première de ces deux formules montre que la diagonale (autre que SS′) du parallélépipède droit, construit avec trois génératrices d'un hyperboloïde dont deux soient perpendiculaires sur la troisième, a une longueur constante et égale à $2\sqrt{a^2+b^2-c^2}$, ou bien encore que les points de la surface par lesquels passent deux génératrices rectangulaires sont sur une sphère concentrique dont le rayon est $\sqrt{a^2+b^2-c^2}$. C'est le corollaire bien connu du théorème de Monge.

La seconde formule signifie que la longueur de la corde interceptée par la sphère de Monge sur une génératrice de l'hyperboloïde est proportionnelle à la tangente de l'angle des deux autres génératrices qui passent par les extrémités de cette corde.

2°
$$\lambda = \mu = \nu = \frac{\pi}{2}.$$

L'hyperboloïde est alors équilatéral.

En divisant la relation (2) par le carré de la formule (1), on obtient

$$\frac{1}{\beta^2\gamma^2}+\frac{1}{\gamma^2\alpha^2}+\frac{1}{\alpha^2\beta^2}=\frac{4}{b^2c^2}+\frac{4}{c^2a^2}-\frac{4}{a^2b^2}.$$

On voit que, si l'on construit un parallélépipède sur trois génératrices rectangulaires deux à deux d'un hyperboloïde équilatéral, la somme des carrés des inverses de ses faces est constante.