NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

J.-B. POMEY

Enveloppes des côtés d'un carré invariable dont deux sommets décrivent deux droites rectangulaires

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 5 (1886), p. 520-530

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1886_3_5__520_1>

ENVELOPPES DES COTÉS D'UN CARRÉ INVARIABLE DONT DEUX SOMMETS DÉCRIVENT DEUX DROITES RECTANGULAIRES;

PAR M. J.-B. POMEY.

Soient Ox, Oy deux axes rectangulaires, et ABCD un carré invariable de grandeur, dont le côté $AB = a$; les sommets A et B glissent sur Ox et Oy. On demande l'enveloppe de AB et celle de BC.

Soit E le point de rencontre des perpendiculaires en A et B aux axes. Ce point est le centre instantané de rotation. Ses projections M, N, P, Q sur les côtés du carré sont les points où ces côtés touchent leurs enveloppes.

Les points A et B décrivant des droites Ox, Oy, le centre géométrique des accélérations est situé en O, et cela permet de construire le rayon de courbure des enveloppes.

Remarque. — Les points C et D décrivent des épicycloïdes, car le lieu du centre instantané de rotation est, dans le plan xOy, le cercle $x^2 + y^2 = a^2$, et, dans le plan variable, c'est le cercle décrit sur AB comme diamètre, de sorte que le mouvement du carré est celui qui lui serait imprimé par un engrenage de La Hire, par le roulement dans un cercle de rayon a d'un cercle de rayon moitié $\left(\frac{a}{2}\right)$.

Désignons par x, y les segments OA, OB interceptés sur les axes par la droite variable AB, on aura, pour équation de AB,

$$\frac{X}{x} + \frac{Y}{y} = 1.$$

En différentiant cette équation et l'équation

$$x^2 + y^2 = a^2,$$

on obtient

$$\frac{X\,dx}{x^2} + \frac{Y\,dy}{y^2} = 0, \qquad x\,dx + y\,dy = 0;$$

d'où l'on tire

$$\frac{X}{x^3} = \frac{Y}{y^3}.$$

Extrayant les racines cubiques, employant la formule

$$\frac{\alpha}{a} = \frac{\beta}{b} = \frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

et élevant à la puissance $\frac{2}{3}$, on obtient aisément

$$X^{\frac{2}{3}} + Y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}},$$

pour équation du lieu du point M.

Si l'on pose $2a = b$ et qu'on remarque que le segment A'B' intercepté sur NQ par les axes est égal à b, on obtient pour enveloppe de NQ

$$X^{\frac{2}{3}} + Y^{\frac{2}{3}} = b^{\frac{2}{3}}.$$

Le lieu du point N est une trajectoire orthogonale des droites A'B'. Posant cette fois $x = \text{OA}'$, $y = \text{OB}'$, on a pour équation de A'B'

$$\frac{X}{x} + \frac{Y}{y} = 1$$

avec

$$x^2 + y^2 = b^2.$$

Si X, Y sont les coordonnées d'un point qui décrit une de ces trajectoires orthogonales, nous aurons

$$\frac{dY}{x} = \frac{dX}{y} = \frac{\sqrt{dX^2 + dY^2}}{b}.$$

Portant $\frac{1}{x}$ et $\frac{1}{y}$ dans $\frac{X}{x} + \frac{Y}{y} = 1$, il vient l'équation différentielle suivante :

$$X + YY' = \frac{bY'}{\sqrt{1 + Y'^2}}.$$

Il s'agit de l'intégrer. On l'intègre par différentiation en posant

$$Y' = \tang \alpha.$$

Ce changement de variable donne

$$X + Y \tang \alpha = b \sin \alpha.$$

Différentiant, il vient

$$dX + dY \tang \alpha + Y \frac{d\alpha}{\cos^2 \alpha} = b \cos \alpha \, d\alpha.$$

On a d'ailleurs

$$dY = \tang \alpha \, dX,$$

d'où

$$(1) \qquad Y = b \cos \alpha - X \cot \alpha,$$

et substituant dans l'équation précédente, on obtient l'équation différentielle linéaire

$$\frac{dX}{d\alpha} - X \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + b \cos \alpha \sin^2 \alpha = 0.$$

Intégrant, il vient

$$X = \sin \alpha (C - a \sin^2 \alpha) \qquad (2a = b);$$

d'où, en remplaçant X par son expression en α dans l'équation (1),

$$Y = \cos\alpha(b - C + a\sin^2\alpha) \qquad (2a = b).$$

X, Y sont ainsi exprimés en fonction du paramètre α.

Pour $C = a$, il vient

$$X = a\sin\alpha\cos^2\alpha, \qquad Y = a\cos\alpha(1 + \sin^2\alpha).$$

Si je prends $\widehat{OBA} = \alpha$ et que je cherche directement les coordonnées du point N comme projection de E sur BC, j'obtiens précisément ces formules.

Pour éliminer α, je pose $\sin\alpha = u$, et, au moyen des équations transformées,

$$(2) \qquad \frac{X}{a} = u(1 - u^2), \qquad \frac{Y}{a} = \sqrt{1 - u^2}(1 + u^2),$$

je forme $\frac{X^2 + Y^2}{X}$, il vient

$$(3) \qquad 3u^2 - u\frac{X^2 + Y^2}{aX} + 1 = 0.$$

Et d'ailleurs la première des équations (2) est

$$(4) \qquad u^3 - u + \frac{X}{a} = 0.$$

Je multiplie (3) par $-u$, (4) par $+3$, j'ajoute et j'ai

$$(5) \qquad u^2\frac{X^2 + Y^2}{aX} - 4u + \frac{3X}{a} = 0.$$

J'élimine u entre (3) et (5), d'après la formule qui donne

$$(ab' - ba')(bc' - cb') = (ac' - ca')^2$$

pour résultant de

$$ax^2 + bx + c = 0, \qquad a'x^2 + b'x + c' = 0$$

J'ai ainsi

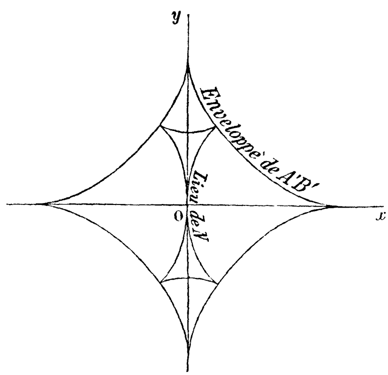
$$\left[-\left(\frac{X^2+Y^2}{aX}\right)^2+12\right]\left(-4+3\,\frac{X^2+Y^2}{a^2}\right)$$
$$=\left(\frac{X^2+Y^2}{aX}-\frac{9X}{a}\right)^2$$

ou, en développant,

$$(X^2+Y^2)^2(X^2+Y^2-a^2)-9\left[X^2-2Y^2+\left(\frac{4}{3}\right)^2\right]=0.$$

Il en résulte une courbe de la forme suivante :

Fig. 1.



La courbe a quatre points de rebroussement là où elle rencontre sa développée, qui est

$$X^{\frac{2}{3}}+Y^{\frac{2}{3}}=b^{\frac{2}{3}}.$$

La valeur de l'angle α correspondant ne paraît pas simple.

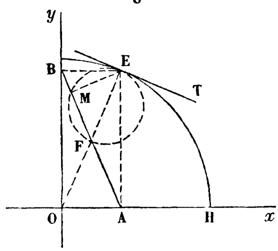
La courbe a la forme indiquée à l'origine; car, pour $X^2=0$, il vient

$$Y^4=0.$$

Pour compléter cette étude, j'ajouterai les remarques suivantes :

Soit F le milieu de OE et, par suite, le milieu de AB. Soit ET la tangente en E au cercle décrit de O comme

Fig. 2.



centre avec $\mathrm{OE} = \mathrm{AB} = a$ comme rayon. Je décris sur $\mathrm{FE} = \frac{a}{2}$ comme diamètre un cercle qui touche ET en E. On a

$$\text{angle}\,\mathrm{TEM} = \text{angle}\,\mathrm{TEF} + \text{angle}\,\mathrm{FEM},$$
$$\text{angle}\,\mathrm{FEM} = \text{angle}\,\mathrm{FEB} - \text{angle}\,\mathrm{BEM},$$

et, en appelant α l'angle $\mathrm{EO}x$, il vient

$$\text{angle}\,\mathrm{TEM} = \frac{\pi}{2} + \left[\alpha - \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\right] = 2\alpha;$$

d'où, en appelant H le point où $\mathrm{O}x$ est coupé par le cercle de rayon OE,

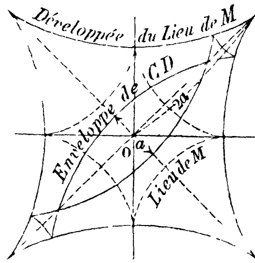
$$\text{arc}\,\mathrm{EH} = \text{arc}\,\mathrm{EFM}.$$

Ainsi le point M décrit une hypocycloïde. Il est toujours en coïncidence avec le point décrivant d'un cercle de rayon $\frac{a}{4}$ tangent intérieurement à un cercle de rayon a dans lequel il roule, si ce point décrivant part de H.

Comme on a $\mathrm{MP} = a$, on voit encore que l'enveloppe de AB et celle de CD sont les développantes d'une même développée (courbes parallèles). L'enveloppe de CD est aisée à construire : on voit géométriquement qu'elle a deux points doubles et deux rebroussements.

Cherchons le rayon de courbure en M de l'enveloppe

Fig. 3.



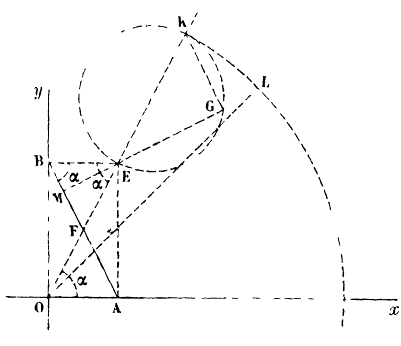
de AB. Les coordonnées du point M, en fonction du paramètre variable $\widehat{EOA} = \alpha$, sont

$$x = a\cos^3\alpha, \qquad y = a\sin^3\alpha.$$

Car on a

$$x = \text{proj.}\,\text{BM (sur O}x\text{)},$$
$$\text{BM} = \text{proj.}\,\text{BE (sur BM)},$$
$$\text{BE} = \text{proj.}\,\text{AB (sur BE)},$$

Fig. 4.



les trois droites faisant avec leurs projections le même angle qui est l'angle $\widehat{EOA} = \alpha$.

Par suite

$$\frac{dx}{d\alpha} = -3a\cos^2\alpha\sin\alpha,$$

$$\frac{dy}{d\alpha} = \quad 3a\sin^2\alpha\cos\alpha;$$

d'où

$$\frac{dx^2+dy^2}{d\alpha^2} = \left(\frac{ds}{d\alpha}\right)^2 = R^2 = 3^2\sin^2\alpha\cos^2\alpha,$$

R étant le rayon de courbure; d'où

$$R = 3\,\text{ME}.$$

Soit MG $= 3$ ME et soit K le point de OE qui se projette sur ME en G. On a

$$\text{EK} = \text{EO} = a \qquad \text{et} \qquad \text{OK} = 2a.$$

De plus, on a

$$\text{angle KEG} = \widehat{\text{MEF}} = 2\alpha - \frac{\pi}{2},$$

et, dans le cercle décrit sur EK comme diamètre,

$$\text{arc KG} = \frac{a}{2}(4\alpha - \pi) = a\left(2\alpha - \frac{\pi}{2}\right).$$

Soit $\text{LO}x = \frac{\pi}{4}$. On a

$$\text{arc KL} = 2a\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = a\left(2\alpha - \frac{\pi}{2}\right),$$

d'où

$$\text{arc KG} = \text{arc KL};$$

donc le point G, centre de courbure de l'enveloppe de AB, est entraîné dans un mouvement hypocycloïdal par un cercle de rayon a, roulant dans un cercle de rayon $2a$. Le point décrivant est un point du petit cercle qui coïncide avec le point de contact des deux cercles roulants quand ce point de contact vient sur la bissectrice de l'angle $y\,Ox$. Donc, par rapport aux bissectrices des angles des axes, l'équation de cette développée est

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = (2a)^{\frac{2}{3}}.$$

C'est le même lieu que celui du point E qu'on aurait fait tourner de 45°. C'est une développante de cette courbe que le côté CD a pour enveloppe. Par rapport aux bissectrices de yOx prises comme axes, on aura donc pour équations d'un point de cette enveloppe de CD

$$x = \sin\alpha(C - 2a\sin^2\alpha),$$
$$y = \cos\alpha(4a - C + 2a\sin^2\alpha),$$

α étant un nouveau paramètre, C une constante à déterminer.

Par rapport aux anciens axes, les équations du lieu du point P sont

$$X = \sin^3\alpha + \cos\alpha, \qquad Y = \cos^3\alpha + \sin\alpha,$$

ou

$$X\sin\alpha + Y\cos\alpha = 1 + \sin\alpha\cos\alpha,$$
$$X\cos\alpha - Y\sin\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha.$$

Mais cela suffit, et nous n'essayerons pas d'éliminer α.

Toutefois remarquons que le premier système résolu en X, Y s'obtient directement en considérant la position du point P obtenue comme projection du centre instantané de rotation et faisant $a = 1$ pour plus de simplicité. Les secondes équations s'en déduisent aisément. Et il est à noter que la seconde est la dérivée de la première par rapport à α. Si, réciproquement, on avait pris d'abord l'équation de la droite CD et qu'on eût cherché son enveloppe par la méthode ordinaire, c'est le deuxième système que l'on eût obtenu d'abord.

Si l'on cherche quelle est, de toutes les droites passant par le point M, celle pour laquelle le segment AB intercepté par les axes rectangulaires Ox, Oy est un minimum, la solution est fournie par la tangente à la courbe appartenant à la famille définie par l'équation

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}},$$

pour laquelle a varie, qui passe par le point M; et, par suite, si X, Y sont les coordonnées de ce point, la grandeur du minimum est

$$a = (X^{\frac{2}{3}} + Y^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}.$$

Cela est évident si l'on observe que le point M peut être considéré comme le point de rencontre de deux tangentes infiniment voisines menées par ce point à la courbe

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}},$$

sur laquelle il est situé. Or, pour cette courbe, les segments interceptés par les axes sur les tangentes sont constamment égaux entre eux et leur longueur est a. Donc la variation de longueur du segment intercepté par les axes sur une droite pivotant autour de M tombe au second ordre d'infiniment petit auprès de la position de la tangente en M à la courbe

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}},$$

qui y passe. C'est donc pour cette position qu'on obtient le minimum.

Si nous considérons maintenant l'aire balayée par la droite AB dans son mouvement, nous voyons aisément que, tandis que le segment variable AM, compris entre la courbe

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}},$$

et l'axe des x, décrit une fois l'aire intérieure Σ de l'hypocycloïde, le second segment MB la décrit lui-même aussi une fois, de sorte que l'aire totale balayée par la droite AB est 2Σ. Or l'aire élémentaire balayée par AB est $\frac{a^2\,d\alpha}{2}$. Donc

$$2\Sigma = \frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi} d\alpha.$$

Mais $\int_0^{2\pi} d\alpha = 2\pi$ (car AB tourne de 2π); donc

$$\Sigma = \frac{2\pi a^2}{4} = \frac{1}{2}\pi a^2.$$

L'aire de l'enveloppe de BC se trouve aussi aisément, car on a

$$\mathrm{BN} = a \sin\alpha \cos\alpha\,;$$

d'où, pour l'aire,

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\,\overline{\mathrm{BN}}^2\, d\alpha &= \int_0^{2} \frac{a^2}{2}\sin^2\alpha\cos^2\alpha\, d\alpha \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{a^2}{8}\sin^2 2\alpha\, d\alpha = \int_0^{4\pi} \frac{a^2}{16}\sin^2\beta\, d\beta \\ &= \int_0^{4\pi} \frac{a^2}{16}\,\frac{1-\cos 2\beta}{2}\, d\beta = \frac{\pi a^2}{8} = \frac{\pi a^2}{2^3}.\end{aligned}$$