Nouvelles annales de mathématiques

Bibliographie

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 5 (1886), p. 53-61

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1886_3_5__53_0>

BIBLIOGRAPHIE.

Exercices de Géométrie analytique et de Géométrie supérieure, à l'usage des candidats aux Écoles Polytechnique et Normale et à l'Agrégation, par *J. Kœhler*, ancien Répétiteur à l'École Polytechnique et ancien Directeur des Études à l'École préparatoire de Sainte-Barbe. *Questions et solutions;* première Partie : *Géométrie plane*. 1 vol. in-8° de VI-347 pages, avec figures dans le texte. Paris, Gauthier-Villars, 1886. Prix : 9fr.

Il est inutile d'insister ici sur l'importance du rôle que jouent les Exercices dans l'enseignement des Mathématiques. Cette importance est manifeste. Les Exercices ne sont pas seulement un complément utile, mais véritablement une partie intégrante de l'enseignement, sans laquelle le reste n'est que lettre morte. Ils doivent entrer pour une part égale à celle de la théorie dans les Cours de Mathématiques, comme cela, d'ailleurs, a lieu dans les examens.

Les Ouvrages didactiques offrent bien, en général, en fin de Chapitres, des Recueils d'exercices; mais ils se bornent, sauf pour de rares exemples, à en donner les énoncés.

Aussi a-t-on dès longtemps reconnu la nécessité d'avoir des Ouvrages spéciaux consacrés aux seuls exercices, et où les solutions se trouvent développées.

On en possède d'excellents relatifs aux Mathématiques élémentaires (Desboves, Frères de la Doctrine chrétienne, etc.), au Calcul différentiel et intégral (Frenet, Tisserand, Villié, etc.), à la Mécanique (P. Jullien, de Saint-Germain, etc.), à la Physique même (Chevallier et Müntz, Edme Jacquier, etc.); mais il faut avouer qu'en ce qui concerne les Mathématiques spéciales notre littérature mathématique française présentait une lacune. Cette lacune, un professeur distingué, auquel une longue expérience de l'enseignement avait signalé ce *desideratum*, M. Kœhler, vient de la combler.

M. Kœhler nous offre un Recueil d'exercices de Géométrie analytique et de Géométrie supérieure en deux Volumes. Le tome I, consacré à la Géométrie plane, vient de paraître. Le tome II, réservé à la Géométrie de l'espace, ne tardera pas à le suivre.

Bien qu'on ne puisse encore juger de l'œuvre que par sa première moitié, on peut dès à présent émettre à son endroit l'opinion la plus favorable. Cette première Partie constitue, en effet, déjà, à elle seule, un Ouvrage fort important et fort bien fait.

L'auteur ne s'est point astreint à suivre, dans la rédaction de son livre, les programmes officiels : il s'est attaché aux théories qui lui ont semblé présenter le plus d'intérêt au point de vue géométrique, à celles qui se prêtent aux développements les plus nombreux et les plus attrayants; il a particulièrement insisté sur celles que l'enseignement classique, limité par les programmes officiels, doit forcément un peu délaisser et qui pourtant sont aujourd'hui de la plus haute importance en Géométrie.

Le Chapitre I est consacré aux cercles et systèmes de cercles. Nous y remarquons des problèmes intéressants sur les quadrilatères et les triangles à la fois inscrits dans un cercle et circonscrits à un autre cercle.

Le Chapitre II renferme des problèmes sur les coniques (propriétés des tangentes, pôles et polaires, diamètres, triangles inscrits et circonscrits, foyers, etc.).

Le Chapitre IV est également relatif aux coniques; mais les problèmes traités ici se rapportent aux normales et aux triangles à la fois inscrits dans une conique et circonscrits à une autre conique. On trouvera là de jolis théorèmes, démontrés d'une manière tout élémentaire.

Dans les deux Chapitres précédents, l'équation des coniques était prise sous forme réduite. Au Chapitre IV, l'auteur envisage ces courbes comme définies par l'équation générale du second degré. Il détermine divers lieux géométriques qui se rattachent à des systèmes de coniques satisfaisant à certaines conditions données. C'est une catégorie de problèmes à laquelle appartiennent bon nombre de questions posées dans les examens.

Le Chapitre V contient des exercices relatifs aux intersections de coniques, aux coniques tangentes et osculatrices, et donne lieu à la même observation que le précédent.

Le Chapitre VI est consacré à l'exposition d'une méthode importante, celle des coordonnées trilinéaires, que l'on se contente d'effleurer dans les Cours et que l'auteur développe avec assez de détails pour que le lecteur puisse en faire une application courante. M. Kœhler a réuni là, en ce qui concerne la ligne droite, le cercle et les coniques, un grand nombre de formules éparses dans divers Ouvrages et qui se prêtent à la solution de bien des problèmes rebelles aux méthodes classiques.

Dans le Chapitre VII, l'auteur donne des applications très nombreuses, très intéressantes, des formules générales établies dans le Chapitre précédent. On y trouve notamment une étude analytique des points et du cercle de Brocard, divers problèmes traités par les coordonnées tangentielles, des applications de la théorie des invariants et covariants d'un système de deux coniques, une étude probablement inédite d'un système harmonique de trois coniques, etc.

Le Chapitre VIII traite des applications de la Géométrie supérieure aux sections coniques. L'auteur, en cette partie de son Ouvrage, a pris pour guides les travaux de Chasles, Cremona, et, comme il nous le dit lui-même dans la Préface, les *Mathematical problems* de Wolstenholme. Un appendice à ce Chapitre est consacré aux triangles et polygones à la fois inscrits et circonscrits à des coniques. On y remarquera une démonstration nouvelle du célèbre théorème de Poncelet.

Enfin le Chapitre IX est réservé aux courbes d'ordre supérieur. Il renferme, entre autres, des propriétés intéressantes des cubiques et la détermination du rayon de courbure, ainsi que la recherche de l'équation du cercle osculateur en coordonnées trilinéaires, questions qui n'avaient probablement jamais été traitées.

Nous devons, faute de place, nous borner à cette rapide analyse, qui ne peut donner qu'une idée bien imparfaite de l'Ouvrage. Il nous est impossible d'énumérer les sujets très nombreux auxquels a touché l'auteur, mais nous sommes certains que les personnes qui, sur ces seules indications, auraient le désir de connaître ce Livre en apprécieront toute la valeur et toute l'originalité.

L'œuvre de M. Kœhler sera utile à la fois aux maîtres et aux élèves; aussi bien est-il permis d'avancer, dès aujourd'hui, qu'elle est destinée à devenir promptement classique.

Nous ne terminerons pas sans louer le soin merveilleux apporté par notre grand éditeur, M. Gauthier-Villars, à l'exécution typographique de ce Volume, comme à celle d'ailleurs de toutes les belles publications qui sortent de ses presses.

MAURICE D'OCAGNE.

INTRODUCTION A LA THÉORIE DES FONCTIONS D'UNE VARIABLE; par *Jules Tannery*, Sous-Directeur des Études scientifiques à l'École Normale supérieure. In-8°. Paris, A. Hermann, 1886. Prix : 10$^{\text{fr}}$.

Quoique les vérités mathématiques se déduisent, dans un ordre rigoureux, d'un petit nombre de principes réputés évidents, on ne parvient point à les posséder pleinement en commençant par ces principes, en en suivant pas à pas les déductions, en allant toujours dans le même sens du connu à l'inconnu, sans jamais revenir en arrière sur un chemin où l'on n'a rien laissé d'obscur. Le sens et la portée des principes échappent au débutant, qui saisit mal la distinction entre ce qu'on lui demande d'accorder et les conséquences purement logiques des hypothèses ou des axiomes; parfois, la démonstration lui paraît plus obscure que l'énoncé; c'est en vain qu'il s'attarderait dans la région des principes pour la mieux connaître, il faut que son esprit acquière des habitudes qu'il n'a pas, qu'il aille en avant, sans trop savoir ni où il va, ni d'où il part; il prendra confiance dans ce mode de raisonnement auquel il lui faut plier son intelligence, il s'habituera aux symboles et à leurs combinaisons. Revenant ensuite sur ses pas, il sera capable de voir, du point de départ et d'un seul coup d'œil, le chemin parcouru : quelques parties de la route resteront pour lui dans l'ombre, quelques-unes même seront peut-être entièrement obscures; mais d'autres sont vivement éclairées; il sait nettement comment on peut aller de cette vérité à cette autre; il sait où il doit porter son attention; ses yeux mieux exercés arrivent à voir clair dans ces passages difficiles dont il n'aurait jamais pu se rendre maître s'il ne les avait franchis; il est maintenant capable d'aller plus loin ou de suivre une autre direction; il entre en possession de vérités nouvelles qui s'ajoutent aux vérités anciennes et qui les éclairent; il s'étonne parfois des perspectives inattendues qui s'ouvrent devant lui et lui laissent voir, sous un aspect nouveau, des régions qu'il croyait connaître entièrement; peu à peu les ombres disparaissent et la beauté de la Science, si une dans sa riche diversité, lui apparaît avec tout son éclat.

Ce qui se passe dans l'esprit de celui qui étudie les Mathématiques n'est que l'image de ce qui s'est passé dans la création et l'organisation de la Science; dans ce long travail, la rigueur déductive n'a pas été seule à jouer un rôle. On peut raisonner fort bien et fort longtemps sans avancer d'un pas, et la rigueur n'empêche pas un raisonnement d'être inutile. Même en Mathématiques, c'est souvent par des chemins peu sûrs que l'on va à la découverte. Avant de faire la grande route qui y mène, il faut connaître la contrée où l'on veut aller; c'est cette connaissance même qui permet de trouver les voies les plus directes; c'est l'expérience seule qui indique les points où il faut porter l'effort; ce sont les difficultés, parfois imprévues, qui se dressent devant les géomètres qui les forcent à revenir au point de départ, à chercher une route nouvelle qui permette de tourner l'obstacle. S'imagine-t-on, par exemple, les inventeurs du Calcul différentiel et intégral s'acharnant, avant d'aller plus loin, sur les notions de dérivée et d'intégrale définie? Ne valait-il pas mieux montrer la fécondité de ces notions, dont l'importance justifie le soin qu'on a mis à les éclaircir? Cette revision même, qu'on a faite de notre temps, l'aurait-on entreprise sans les questions que l'étude des fonctions et particulièrement des séries trigonométriques a posées d'une manière inévitable?

Pour en revenir à l'enseignement, il me semble que, dans notre système d'instruction, la revision des principes de l'Analyse s'impose nécessairement comme transition entre les matières que l'on traite dans les cours de Mathématiques spéciales et celles que l'on étudie soit dans les Facultés, soit dans les Écoles d'enseignement supérieur. A la fin de la classe de Mathématiques spéciales, les élèves sont maîtres d'un nombre de faits mathématiques déjà considérable; ils possèdent les éléments de l'Algèbre, de la Géométrie analytique et même du Calcul différentiel et intégral. Un classement rigoureux de ces matériaux est indispensable. C'est pour faciliter ce travail, en ce qui concerne l'Analyse, que je me suis décidé à publier le présent Livre, où j'ai développé quelques leçons faites à l'École Normale en 1883. Je l'ai fait aussi élémentaire que j'ai pu, en m'efforçant de rapprocher les choses des principes, mais en essayant toutefois d'être particulièrement utile à ceux qui désirent pousser leurs études mathématiques beaucoup plus loin que je ne prétends les conduire.

Je n'ai eu qu'à me livrer à un travail d'arrangement et de rédaction : les faits mathématiques qui constituent et constitueront toujours les éléments de l'Analyse étaient acquis pour la plupart au commencement de ce siècle ; à la vérité, bien des démonstrations laissaient à désirer ; mais, après les exemples de rigueur donnés par Gauss, après les travaux de Cauchy, d'Abel, de Lejeune-Dirichlet, de Riemann, de M. O. Bonnet, de M. Heine, après l'enseignement de M. Weierstrass, divulgué et développé par ses disciples, après le Mémoire de M. Darboux sur les fonctions discontinues, les Livres de M. Dini et de M. Lipschitz, il ne semble pas qu'il reste quelque chose d'essentiel à élucider dans les sujets auxquels je me suis borné.

On peut constituer entièrement l'Analyse avec la notion de nombre entier et les notions relatives à l'addition des nombres entiers ; il est inutile de faire appel à aucun autre postulat, à aucune autre donnée de l'expérience ; la notion de l'infini, dont il ne faut pas faire mystère en Mathématiques, se réduit à ceci : après chaque nombre entier, il y en a un autre. C'est à ce point de vue que j'ai essayé de me placer. A la vérité, pour être complet, il eût fallu reprendre la théorie des fractions ; une fraction, du point de vue que j'indique, ne peut pas être regardée comme la réunion de parties égales de l'unité ; ces mots *parties de l'unité* n'ont plus de sens : une fraction est un ensemble de deux nombres entiers, rangés dans un ordre déterminé ; sur cette nouvelle espèce de nombres, il y a lieu de reprendre les définitions de l'égalité, de l'inégalité et des opérations arithmétiques. J'aurais dû aussi reprendre la théorie des nombres positifs et négatifs, théorie que l'on ne dégage pas toujours de la considération des grandeurs concrètes, et dans laquelle il faut encore reprendre à nouveau les définitions élémentaires. Mais tout cela est facile et les développements que j'aurais dû donner sur ces sujets auraient allongé mon Livre et augmenté, sans grande utilité, la fatigue du lecteur. J'ai donc supposé acquise la théorie des opérations rationnelles sur les nombres entiers ou fractionnaires, positifs ou négatifs, et j'ai débuté par l'introduction des nombres irrationnels. J'ai développé une indication donnée par M. Joseph Bertrand dans son excellent Traité d'Arithmétique et qui consiste à définir un nombre irrationnel en disant quels sont tous les nombres rationnels qui sont plus petits et tous ceux qui sont plus grands que lui ; c'est de cette façon que les nombres irrationnels s'introduisent le plus naturellement quand on traite de la mesure des grandeurs incommensurables avec l'unité; j'ai d'ailleurs cherché à dégager la notion de nombre irrationnel de son origine géométrique. J'ai appris, par une citation de M. G. Cantor (*Grundlagen einer allgemeiner Mannichfaltigkeitslehre*, p. 21), que M. Dedekind avait développé la même idée dans un écrit intitulé *Stetigkeit und irrationale Zahlen* (Brunswick, 1872); je n'ai pas eu à ma disposition le travail de M. Dedekind, mais les développements d'une même idée se ressemblent forcément, et il y a lieu de supposer que ce qui est bon dans mon exposition se retrouve dans celle du géomètre allemand, qui a d'ailleurs bien d'autres titres de gloire. D'autres points de départ ont été indiqués : M. Weierstrass, qui ne craint pas de s'attarder sur ces matières dans un cours qui aboutit à l'étude des fonctions abéliennes, considère, si mes renseignements sont exacts, un nombre irrationnel comme la somme d'un nombre infini d'éléments rationnels, en précisant toutefois avec rigueur sous quelles conditions on peut parler de pareilles sommes et les employer; M. Heine, dans le Mémoire déjà cité, *Die Elemente der Functionenlehre*, a proposé de dire qu'une suite infinie de nombres rationnels

$$u_1, \quad u_2, \quad \ldots, \quad u_n, \quad \ldots$$

a une *limite* lorsque, à chaque nombre rationnel positif ε correspond un indice n tel que la différence $u_{n+p} - u_n$ soit, pour toutes les valeurs du nombre entier positif p, inférieure à ε en valeur absolue. Cette définition admise, l'introduction des nombres irrationnels, comme limites de pareilles suites, ne souffre aucune difficulté; c'est la marche qu'ont suivie MM. Lipschitz, du Bois-Reymond, G. Cantor. Je trouve cette définition plus arbitraire que celle que j'ai adoptée, qui permet, dès qu'un nombre irrationnel est défini, de lui donner sa place dans l'échelle des nombres; cependant, comme on ne peut se dispenser de faire l'étude des suites qui jouissent de la propriété précédente, j'ai fait cette étude indépendamment de la théorie des opérations effectuées sur les nombres irrationnels, en montrant comment elle permettrait de constituer cette théorie. Le lecteur ne manquera pas de remarquer que mon exposition pourrait être abrégée en ne reprenant pas deux fois, comme j'ai fait, les choses au commencement.

Les notions de nombre irrationnel et de limite une fois acquises, les éléments de la théorie des séries et des produits infinis ne présentent aucune difficulté; les deux façons d'introduire ces notions y jouent un rôle essentiel; la seconde n'est d'ailleurs autre chose que le point de départ adopté par Cauchy, pour la théorie des séries, dans son *Cours d'Analyse de l'École royale Polytechnique,* Livre qu'on peut encore admirer, depuis le temps où Abel disait qu'*il devait être lu par tout analyste qui aime la rigueur dans les recherches mathématiques*. La notion de produit infini se relie étroitement à celle de série; les deux notions, à elles deux, ne tiennent pas plus de place dans l'esprit qu'une seule; j'ai cru devoir les développer concurremment.

Avant de parler des séries et des produits infinis dont les termes dépendent d'une variable, j'ai donné quelques théorèmes généraux relatifs aux fonctions d'une variable; je me suis efforcé de préciser les définitions, d'éclaircir les notions de continuité, de limites supérieure et inférieure. J'ai fait grand usage, dans ce Chapitre et ailleurs, du beau Mémoire de M. Darboux *Sur les fonctions discontinues*. J'ai repris ensuite les définitions des fonctions a^x, $\log x$, x^m; à propos de la fonction a^x, j'ai reproduit la démonstration par laquelle Cauchy déduit la forme de cette fonction de son théorème d'addition.

Dans le Chapitre suivant, je reprends la théorie des séries et des produits infinis; je me suis appesanti particulièrement sur les séries ordonnées suivant les puissances entières et positives d'une variable; à la vérité, j'ai supposé, là comme partout, la variable réelle : une variable imaginaire, c'est au fond deux variables réelles, et je tenais à me limiter au cas d'une seule variable; mais l'exposition est faite de manière à permettre la généralisation immédiatement et sans aucun effort; il n'y a, le plus souvent, qu'à mettre le mot *module* à la place des mots *valeur absolue*. Dans notre enseignement, on déduit d'habitude de la formule de Taylor les développements en série des fonctions trigonométriques, et l'on tire leurs développements en produits infinis ou en séries de fractions simples de propositions générales appartenant à la théorie des fonctions d'une variable imaginaire; il me paraît bien regrettable de laisser ignorer aux étudiants les procédés si simples, si naturels par lesquels Euler a obtenu ces développements; ils deviennent tous rigoureux par l'application d'un même raisonnement, de celui qui permet de déduire la continuité d'une série de l'uniformité de sa convergence. Il va sans dire que j'ai dû dégager la définition des fonctions circulaires de toute considération géométrique; j'ai terminé ce Chapitre en indiquant les propriétés les plus simples de la fonction $\Gamma(x)$, de manière à mettre le lecteur sur la voie du beau théorème de M. Weierstrass sur la décomposition d'une fonction transcendante entière en facteurs primaires.

J'aborde enfin les notions de dérivée et d'intégrale définie; mon but n'était pas d'écrire un Traité de Calcul différentiel et intégral; j'ai glissé sur les procédés de calcul, en insistant sur les théorèmes généraux. J. TANNERY.