Nouvelles annales de mathématiques

Agrégation des sciences mathématiques (concours de 1886)

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 5 (1886), p. 579-583

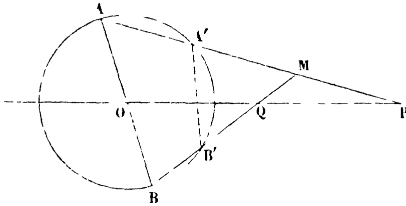
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1886_3_5__579_1>

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES (CONCOURS DE 1886).

Mathématiques élémentaires.

On donne un cercle et deux points P et Q situés sur un de ses diamètres; on joint les points P et Q aux extrémités A et B d'un diamètre du cercle par les droites PA et QB qui se coupent au point M; on fait tourner le diamètre AB, et l'on demande :

1° D'étudier la variation du rapport $\frac{MA}{MB}$ et de construire la figure lorsque ce rapport a une valeur donnée;



2° D'étudier la variation de l'angle AMB et de construire la figure lorsque cet angle a une valeur donnée;

3° A′ et B′ étant les seconds points d'intersection des droites MA et MB avec la circonférence du cercle donné, de trouver le lieu du centre du cercle circonscrit au triangle MA′B′.

Mathématiques spéciales.

Étant donnés dans un plan une droite D, un point O sur cette droite, et une droite D′, on demande :

1° De former l'équation générale des coniques qui touchent la droite D au point O et qui ont la droite D′ pour directrice;

2° De montrer que deux de ces coniques passent par un point quelconque P du plan. Déterminer la région où doit se trouver le point P pour que ces deux courbes soient réelles et, dans ce cas, en reconnaître le genre.

3° Les deux coniques du faisceau considéré qui passent en un point P se coupent en un second point P′; calculer les coordonnées du point P′ en fonction de celles du point P; et, en supposant que le point P décrive une ligne C, trouver quelle doit être la forme de l'équation de cette ligne pour que le point P′ décrive la même ligne.

Analyse et ses applications géométriques.

Théorie. — Démontrer que, quand n augmente indéfiniment, la fraction

$$\frac{n^a}{a\left(1+\frac{a}{1}\right)\left(1+\frac{a}{2}\right)\left(1+\frac{a}{n}\right)}$$

tend vers une limite $\Gamma(a)$ qui est une fonction bien déterminée de a, pour toutes les valeurs réelles ou imaginaires de cette variable.

Montrer que, si l'on donne à a une valeur positive, la fonction $\Gamma(a)$ est égale à l'intégrale eulérienne

$$\int_0^\infty x^{a-1} e^{-x}\,dx.$$

Montrer que, pour une valeur quelconque de a, on a les relations suivantes :

$$\Gamma(a+1) = a\,\Gamma(a), \qquad \Gamma(a)\,\Gamma(1-a) = \frac{\pi}{\sin a\pi}.$$

Application. — On désigne par p et q deux quantités réelles et l'on propose :

1° De calculer le module de $\Gamma(qi)$;

2° De montrer que $\Gamma(p+qi)$ tend vers zéro lorsque q devient infini, la quantité p restant comprise entre $-\infty$ et un nombre positif fini;

3° De calculer l'intégrale $\int_{-x}^{\infty} \Gamma(1+y\,i)\,dy$.

Mécanique.

Un solide homogène, sur lequel n'agit aucune force extérieure, a la forme d'un parallélépipède rectangle dont les arêtes ont respectivement pour longueurs a, $2a$, $4a$; il est d'abord en repos, mais il peut se mouvoir librement dans l'espace.

Une sphère homogène, animée d'un mouvement de translation uniforme dont la vitesse U est parallèle aux arêtes moyennes du parallélépipède, vient choquer ce solide en un point M situé sur l'une de ses faces F, perpendiculaire à ses arêtes moyennes.

La masse du parallélépipède est représentée par 12 et celle de la sphère par 4; les deux corps sont parfaitement élastiques.

Cela posé, on demande :

1° De déterminer les conditions initiales du mouvement que les deux solides prendront après le choc;

2° D'étudier le mouvement que prendra ultérieurement le parallélépipède dans le cas particulier où le point M coïncide avec l'un des sommets de la face choquée F.

Calcul.

Sur un cylindre droit, dont la base est un cercle de 5^m de rayon, on a tracé une hélice qui coupe les génératrices du cylindre sous un angle de 30°. Calculer, avec l'approximation que comporte l'emploi des Tables à sept décimales, la longueur du plus petit arc de l'hélice considérée, tel que les tangentes menées à la courbe aux extrémités de cet arc se rencontrent.

Épure.

On donne : 1° un paraboloïde de révolution autour d'un axe vertical OZ; 2° deux cylindres circonscrits à la sphère qui touche le paraboloïde en tous les points du parallèle dont le plan passe par le foyer F du paraboloïde.

Les axes des cylindres sont horizontaux et chacun d'eux fait un angle de 45° avec le plan vertical de projection.

L'espace intérieur au paraboloïde étant considéré comme plein, on demande de représenter la partie de ce solide qui est extérieure aux deux cylindres. Les plans de projection sont opaques.

L'axe OZ est à $0^{m},10$ en avant du plan vertical; la cote du sommet du paraboloïde est égale à $0^{m},20$, celle du foyer F à $0^{m},18$.