Sur l'enveloppe de certaines droites variables (suite)

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 5 (1886), p. 88-97
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1886_3_5__88_1>

SUR L'ENVELOPPE DE CERTAINES DROITES VARIABLES

[SUITE (1)];

PAR M. MAURICE D'OCAGNE.

LA SURFACE COMPRISE ENTRE L'ARC *ab* ET SA CORDE EST CONSTANTE.

Dans ce cas, les aires élémentaires décrites par les droites *ea* et *eb* étant égales, on a, en appelant ε l'angle de contingence de l'enveloppe au point *e*,

$$\varepsilon . ea^2 = \varepsilon . eb^2$$

ou

$$ea = eb.$$

Le point e est donc le milieu de ab.

Si la courbe donnée C se compose d'un système de deux droites concourantes, la courbe enveloppe est une hyperbole ayant ces deux droites pour asymptotes.

(1) Voir *Nouvelles Annales*, 3e serie, t. II, 1883, p. 252.— Dans les figures du present Article, les gros traits indiquent les lignes données, les traits fins les lignes de construction, enfin les traits pointillés les lignes qui n'interviennent que dans la démonstration.

La différence entre l'arc ab et sa corde est constante.

La démonstration est de tous points analogue à celle qui a été donnée [1] pour le cas où la somme de l'arc et de la corde est constante; on trouve que le point e est, dans ce cas, *le point de contact sur ab du cercle inscrit dans le triangle formé par cette corde et les tangentes à ses extrémités.*

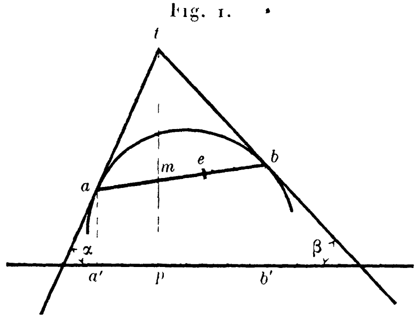
Il en résulte que, si la courbe C se compose de deux droites concourantes, la courbe enveloppe est un cercle tangent à ces deux droites.

La projection de la corde ab sur un axe fixe est constante.

Soit $a'b'$ cette projection (*fig.* 1). On a toujours

$$\frac{d(a)}{d(b)} = \frac{at.ae}{bt.be}.$$

Fig. 1.



D'ailleurs

$$d(a) = \frac{d(a')}{\cos\alpha}, \qquad d(b) = \frac{d(b')}{\cos\beta},$$

et comme $d(a') = d(b')$, par hypothèse,

$$\frac{d(a)}{d(b)} = \frac{\cos\beta}{\cos\alpha}.$$

[1] *Loc, cit.* p. 254.

Donc

$$\frac{\cos\beta}{\cos\alpha} = \frac{at.ae}{bt.be} \quad \text{ou} \quad \frac{ae}{be} = \frac{bt.\cos\beta}{at.\cos\alpha} = \frac{b'p}{a'p} = \frac{bm}{am};$$

de là résulte que

$$ae = bm,$$

ce qui détermine le point e.

En particulier, si la courbe donnée est une parabole ayant son axe perpendiculaire à $a'b'$, la droite tm étant parallèle à l'axe passe par le milieu de ab, et le point e se confond alors avec ce point milieu, c'est-à-dire avec le point où ab touche son enveloppe si cette droite forme avec la parabole un segment d'aire constante; de là ce théorème :

Si une droite mobile forme avec une parabole un segment d'aire constante, la projection de ce segment de droite sur la directrice est constante.

L'ARC ab DÉTERMINE, AVEC DEUX DROITES ISSUES D'UN POINT FIXE, UN SECTEUR D'AIRE CONSTANTE.

Les aires élémentaires engendrées par les droites ao et bo (*fig.* 2) tournant d'un angle infiniment petit autour du point o, devant être égales, puisque l'aire $oacb$ est constante, nous avons, en abaissant du point o les perpendiculaires $o\mu$ et $o\nu$ sur at et bt,

$$d(a).o\mu = d(b).o\nu;$$

donc

$$\frac{o\nu}{o\mu} = \frac{ae.at}{be.bt}, \quad \text{d'où} \quad \frac{ae}{be} = \frac{bt.o\nu}{at.o\mu},$$

ou, en abaissant des points a et b les perpendiculaires ap et bq sur ot,

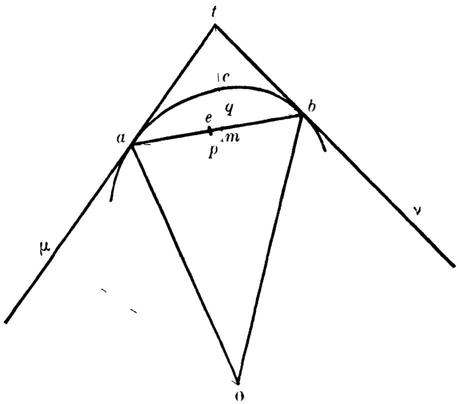
$$\frac{ae}{be} = \frac{ot.bq}{ot.ap} = \frac{bq}{ap} = \frac{bm}{am},$$

c'est-à-dire

$$ae = bm.$$

La construction se réduit donc à ceci : *ot coupant ab au point m, porter ae = bm.*

Fig. 2.



Si la courbe donnée se compose de deux droites concourantes, la courbe enveloppe est une parabole tangente à ces droites.

Si la courbe donnée est une conique de centre o, le point m, et, par suite, le point e, vient se confondre avec le milieu de ab, d'où l'on déduit ce théorème :

Si une corde ab se déplace dans une conique de centre o de telle façon que le triangle oab ait une aire constante, le secteur d'ellipse oab a également une aire constante.

Les parallèles a deux directions fixes menées par les points a et b se coupent sur une courbe donnée.

Soient am et bm ces droites (*fig.* 3). Puisqu'elles restent parallèles à des directions fixes, on a, en supposant xy tangente à la courbe décrite par le point m,

$$\frac{d(b)}{d(m)} = \frac{by}{my}, \qquad \frac{d(m)}{d(a)} = \frac{mx}{ax};$$

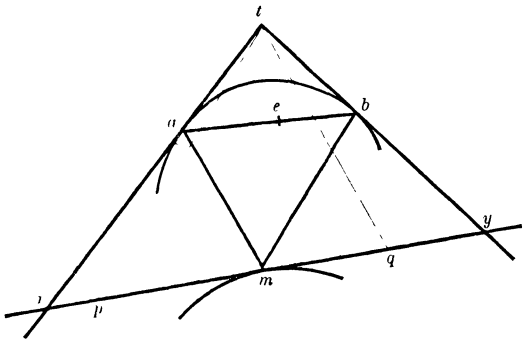
d'ailleurs

$$\frac{d(a)}{d(b)} = \frac{at.ae}{bt.be}.$$

Multipliant ces trois égalités membre à membre, nous avons

$$\frac{at.ae.by.mx}{bt.be.my.ax} = 1 \quad \text{ou} \quad \frac{ae}{be} = \frac{bt.my.ax}{at.by.mx}.$$

Fig. 3.



Tirons tp parallèle à mb, tq parallèle à ma: nous avons

$$mp = \frac{bt.my}{by}, \qquad mq = \frac{at.mx}{ax};$$

donc

$$\frac{ae}{be} = \frac{mp}{mq},$$

expression qui fournit une facile construction du point e.

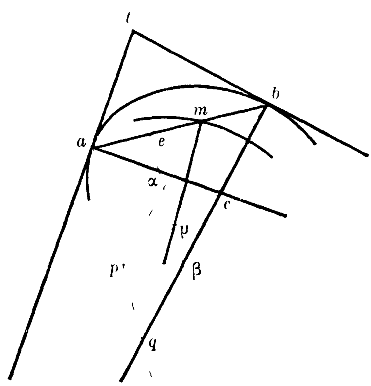
Comme application, supposons que la courbe donnée soit un système de deux droites concourantes tp et tq, que le point m doive décrire la droite pq, enfin que les directions fixes soient précisément celles de tp et tq; la courbe enveloppe sera alors une parabole tangente à tp et tq aux points p et q. De là ce théorème :

tp et tq étant tangentes à une parabole aux points p et q, ab, tangente à cette courbe au point e, coupant tp et tq aux points a et b, ab est divisé par le point e dans le même rapport que pq par le pied de la droite qui joint le point t au milieu de ab.

La corde *ab* est coupée par une courbe fixe en segments de rapport constant.

Soit m le point où le segment ab est coupé par la courbe fixe (*fig.* 4); le rapport $\frac{am}{bm}$ est constant; donc, si les normales $a\alpha$ et $b\beta$ à la première courbe, $m\mu$ à la

Fig. 4.



seconde, coupent en α, β et μ la normale menée par le point e à l'enveloppe de ab, on a

$$\frac{\alpha\mu}{\beta\mu} = \frac{am}{bm}.$$

En a élevons à ab la perpendiculaire aq qui coupe $e\mu$

au point p; nous avons

$$\frac{ap}{qp} = \frac{\alpha\mu}{\beta\mu} = \frac{am}{bm};$$

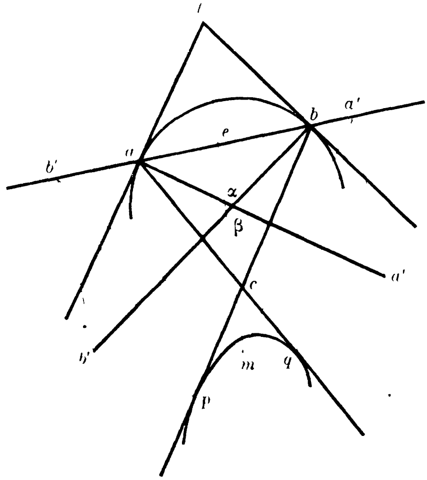
donc la droite mp est parallèle à bq; de là, la construction suivante :

Elever à ab la perpendiculaire ap; tirer mp parallèle à $b\beta$, cp coupant $m\mu$ au point μ, abaisser de μ sur ab la perpendiculaire μe.

Les tangentes menées des points a et b à une courbe fixe forment un angle constant.

Soient aq et bp ces tangentes (*fig.* 5); les normales aa' et bb' à la première courbe coupent aux points a' et

Fig. 5.



b' les normales qa' et pb' à la seconde. L'angle pcq étant constant, les angles de contingence aux points p et q

sont égaux; par suite

$$\frac{d(a)}{d(b)} = \frac{aa'}{bb'}.$$

D'ailleurs, si $e\alpha$ est normale à l'enveloppe cherchée, on a

$$\frac{d(a)}{d(b)} = \frac{a\alpha}{b\beta}.$$

Donc

$$\frac{a\alpha}{aa'} = \frac{b\beta}{bb'},$$

ou, si $a'a''$ et $b'b''$ sont perpendiculaires à ab,

$$\frac{ae}{aa''} = \frac{be}{bb''}.$$

On déduit de là que, si $a''m$ est parallèle à at et $b''m$ à bt, le point m se trouve sur te. On peut d'ailleurs remarquer que, le quadrilatère $aqa'a''$ étant inscriptible, on a

$$\widehat{aqa''} = \widehat{aa'a''},$$

et comme $\widehat{aa'a''} = \widehat{tab}$, puisque ces angles ont leurs côtés perpendiculaires, on a aussi

$$\widehat{aqa} = \widehat{tab}.$$

De même

$$\widehat{bpb} = \widehat{tba}.$$

On pourra donc énoncer comme suit la construction du point e :

Faire $aqa'' = \widehat{tab}$ et $bpb'' = \widehat{tba}$; mener $a''m$ parallèle à at et $b''m$ parallèle à bt; tirer mt qui coupe ab au point e.

Si la courbe enveloppée par aq et bp se réduit à un point, on retombe sur un cas déjà traité (¹). Mais la construction précédente appliquée a ce cas particulier est moins simple que la construction donnée à l'endroit cité. Les conditions spéciales du problème conduisent en effet, dans ce cas, à des simplifications qui n'ont pas leur équivalent dans le cas général.

Si l'angle atb des tangentes en a et b à la courbe considérée (²) est constant, si la droite ab touche son enveloppe au point e et si α et β sont les centres de courbure qui répondent aux points a et b, nous avons vu (3ᵉ série, t. II, p. 258) que *le point o étant tel qu'on voie de ce point les rayons de courbure $a\alpha$ et $b\beta$ sous des angles droits, les angles aob et toe ont même bissectrice.*

Mais le point o peut être imaginaire; c'est ce qui arrive lorsque les cercles de diamètres $a\alpha$ et $b\beta$ ne se coupent pas. La construction qui résulte du théorème précédent devient alors illusoire. Voici un nouveau théorème qui donne la solution du problème dans tous les cas

Si les droites $t\alpha$ et $t\beta$ coupent respectivement aux points α' et β' le cercle circonscrit au triangle atb, les droites $a\beta'$ et $b\alpha'$ se coupent en un point g dont la projection sur la droite ab est précisément le point e.

En effet (³), appelons pour le moment e' la projection du point g sur la droite ab. Nous avons $\widehat{eag} = \widehat{bt\beta}$ et $\widehat{ebg} = \widehat{at\alpha}$ (même mesure); les triangles rectangles eag

---

(¹) *Nouvelles Annales*, 3ᵉ série, t. II, p. 256.

(²) Il est bien entendu qu'ici, comme dans tout ce qui précède, cette courbe peut être un système de deux courbes distinctes décrites séparément par les points a et b.

(³) Le lecteur est prié de faire la figure et $bt\beta$ d'une part, ebg et $at\alpha$ de l'autre, sont donc semblables; par suite,

$$\frac{ae'}{ge'} = \frac{bt}{b\beta}, \qquad \frac{be'}{ge'} = \frac{at}{a\alpha},$$

d'où

$$\frac{ae'}{be'} = \frac{bt.a\alpha}{at.b\beta}.$$

Or, en se reportant à l'endroit cité, on voit que

$$\frac{ae.at}{be.bt} = \frac{a\alpha}{b\beta};$$

donc

$$\frac{ae'}{be'} = \frac{ae}{be},$$

et le point e' se confond avec le point e.

Remarquons que le cercle circonscrit au triangle atb a pour diamètre la droite qui joint le point t au point de rencontre des normales $a\alpha$ et $b\beta$.