LUCIEN LÉVY

Démonstration d'une formule relative à la capillarité

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 8 (1889), p. 111-115

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1889_3_8__111_1>

DÉMONSTRATION D'UNE FORMULE RELATIVE A LA CAPILLARITÉ;

PAR M. LUCIEN LÉVY.

L'ouvrage classique de MM. Jamin et Bouty contient, pour établir la formule de Laplace

$$\Delta p = \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right) F,$$

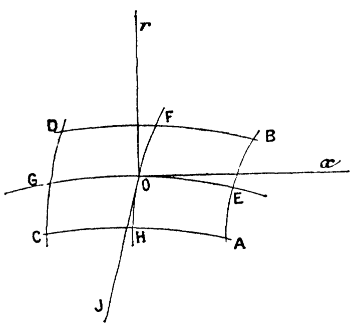
une démonstration dont le principe est dû à M. Lippmann, mais qui est incorrecte dans les termes où elle est présentée. La Note qui suit a pour objet de rectifier cette démonstration.

Nous admettons sans discussion l'hypothèse de M. Lippmann. La surface du liquide peut être assimilée à une pellicule sans épaisseur, extensible et compressible le long de la surface liquide; découpons fictivement un élément de surface par une ligne fermée : cet élément tendra à se contracter comme une membrane de caoutchouc et, pour le maintenir en équilibre, il faudra appliquer certaines forces tout le long du contour. On admet que la force appliquée à un élément de ligne est, dans le plan tangent à la surface, normale à cet élément et proportionnelle à la longueur ds de cet élément. Elle peut donc être représentée par une expression de la forme

$$F\, ds,$$

F étant un coefficient constant.

Cela posé, étudions les conditions d'équilibre d'un rectangle élémentaire tracé sur la surface. Ce rectangle ne sera pas quelconque comme l'indique la démonstration citée; voici comment nous le déterminerons. Par



un point O de la surface, menons deux lignes de courbure GOE, FOH. Sur la première prenons, à partir du point O, deux longueurs égales OE, OG infiniment petites : en E et en G passent deux lignes de courbure du second système AB, CD. De même, sur la seconde ligne, prenons à partir du point O deux longueurs égales

OF, OH infiniment petites : en F et en H passent deux lignes de courbure du premier système BD, AC. Les quatre lignes AB, BD, DC, CA se coupent à angle droit et limitent un rectangle infiniment petit : nous considérerons ce rectangle comme l'élément de surface dont il a été question. Il est soumis aux tensions superficielles, normales aux quatre côtés, à la pression extérieure normale à la surface, et à la pression intérieure également normale à la surface. Ces dernières pressions sont proportionnelles à l'élément de surface.

Pour établir l'équation d'équilibre, nous prendrons comme axes la normale Oz à la surface au point O et les tangentes Ox, Oy aux deux lignes de courbure.

Soient p la pression extérieure au point O, comptée de z vers O, $p + \Delta p$ la pression intérieure, évaluée dans le sens contraire; la pression extérieure sur l'élément ABCD sera

$$p\,\mathrm{AB}.\mathrm{AC};$$

la pression intérieure sur le même élément,

$$-(p + \Delta p)\,\mathrm{AB}.\mathrm{AC}.$$

La résultante de ces deux forces, dirigée comme elles suivant Oz, sera

$$-\Delta p.\mathrm{AB}.\mathrm{AC}.$$

Pour que l'élément, considéré comme solide, reste en équilibre, il est nécessaire que la somme des projections sur Oz des tensions superficielles et de la résultante précédente soit égale à zéro.

Evaluons ces projections.

La tension normale à AB a pour expression

$$\mathrm{F} \times \mathrm{AB}.$$

Or, en vertu d'un théorème connu sur le déplacement d'un élément de ligne, AB et FH ne diffèrent que par un infiniment petit du second ordre, et, comme nous aurons à projeter sur Oz, qui est à peu près perpendiculaire sur la direction de cette force, nous négligeons seulement des infiniment petits du troisième ordre, en adoptant pour expression de la tension normale

$$F \times FH.$$

La direction de cette force, qui est tangente en E à la ligne de courbure GOE, fait avec Oz un angle α dont le cosinus a pour valeur principale $\frac{dz}{dx}$. La projection a donc pour expression

$$F \times FH \times \cos\alpha = F \times FH \times \frac{dz}{dx}.$$

La tension normale à CD en G donne aussi

$$F \times FH \times \frac{dz}{dx}.$$

De même les tensions normales à AC et à BD ont pour projections chacune

$$F \times GE \frac{dz}{dy}.$$

L'équation d'équilibre est donc

$$-\Delta p . AB . AC + 2F \times FH \frac{dz}{dx} + 2F \times GE \frac{dz}{dy} = 0,$$

qui peut aussi s'écrire

$$(1) \qquad -\Delta p . FH . GE + 2F \times FH \frac{dz}{dx} + 2F . GE \frac{dz}{dy} = 0.$$

Il ne reste plus qu'à évaluer FH, GE, $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$. Or, avec les axes choisis, $\frac{dz}{dx}$ et $\frac{dz}{dy}$ sont nuls à l'origine, ainsi que $\frac{d^2 z}{dx\, dy}$: l'équation de la surface peut donc s'écrire, en supposant seulement que dans le voisinage de l'origine z puisse être développée en série ordonnée suivant les puissances ascendantes de x et de y,

$$z = ax^2 + by^2 + \ldots,$$

les termes négligés étant du troisième ordre.

Donc

$$\frac{dz}{dx} = 2ax,$$

$$\frac{dz}{dy} = 2by,$$

en s'en tenant aux termes du premier ordre.

D'autre part,

$$\mathrm{FH} = 2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

et, comme x et z sont infiniment petits par rapport à y,

$$\mathrm{FH} = 2\sqrt{y^2} = 2y.$$

De même,

$$\mathrm{GE} = 2x.$$

L'équation devient ainsi

$$-\Delta p . 4xy + 2\mathrm{F} . 2y . 2ax + 2\mathrm{F} . 2x . 2by = 0$$

ou, en simplifiant,

$$-\Delta p + \mathrm{F} . (2a + 2c) = 0.$$

Si l'on appelle R et R' les rayons de courbure principaux au point O, comme

$$2a = \frac{1}{\mathrm{R}},$$

$$2c = \frac{1}{\mathrm{R'}},$$

on obtient la formule de Laplace

$$\Delta p = \left(\frac{1}{\mathrm{R}} + \frac{1}{\mathrm{R'}}\right)\mathrm{F}.$$