Nouvelles annales de mathématiques

Ch. de Comberousse

Sur les équations réciproques

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 8 (1889), p. 27-33

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1889_3_8__27_1>

SUR LES ÉQUATIONS RÉCIPROQUES;

PAR M. CH. DE COMBEROUSSE.

1. Soit l'équation algébrique quelconque

$$\varphi(z) = A_0 z^m + A_1 z^{m-1} + A_2 z^{m-2} + \ldots + A_{m-2} z^2 + A_{m-1} z + A_m = 0.$$

La transformée en $\frac{1}{z}$ de cette équation est

$$\varphi\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{A_0}{z^m} + \frac{A_1}{z^{m-1}} + \frac{A_2}{z^{m-2}} + \ldots + \frac{A_{m-2}}{z^2} + \frac{A_{m-1}}{z} + A_m = 0;$$

z étant supposé différent de zéro, multiplions les deux membres par z^m et renversons l'ordre des termes; nous aurons

$$z^m \varphi\left(\frac{1}{z}\right) = A_m z^m + A_{m-1} z^{m-1} + A_{m-2} z^{m-2} + \ldots$$
$$+ A_2 z^2 + A_1 z + A_0 = 0.$$

On obtient donc la transformée en $\frac{1}{z}$ en échangeant dans la proposée les coefficients des termes également éloignés des extrêmes.

Pour obtenir maintenant la transformée en $-\frac{1}{z}$ de l'équation $\varphi(z) = 0$, il suffit de changer z en $-z$ dans le résultat précédent. L'équation de la nouvelle transformée est ainsi :

$$(-z)^m \varphi\left(-\frac{1}{z}\right) = A_m(-z)^m + A_{m-1}(-z)^{m-1}$$
$$+ A_{m-2}(-z)^{m-2} + \ldots$$
$$+ A_2(-z)^2 + A_1(-z) + A_0 = 0.$$

Suivant que m sera *pair* ou *impair*, on changera dans le second membre les signes des termes de degré *impair* ou *pair*. De cette manière, le premier terme du second membre aura toujours le signe $+$, et le facteur $(-z)^m$ du premier membre sera toujours remplacé par z^m. On aura donc finalement, pour la transformée en $-\frac{1}{z}$,

$$z^m \varphi\left(-\frac{1}{z}\right) = A_m z^m - A_{m-1} z^{m-1} + A_{m-2} z^{m-2} - \ldots$$
$$\pm A_2 z^2 \mp A_1 z \pm A_0 = 0.$$

2. La dernière transformation effectuée conduit naturellement à l'étude des *équations réciproques de seconde espèce*.

On peut appeler ainsi toute équation $\varphi(z) = 0$ dont les racines, au lieu d'être simplement réciproques, sont *réciproques et de signes contraires*. A une racine $z = a$

répond alors une autre racine $-\frac{1}{z} = -\frac{1}{a}$, et le produit des racines conjuguées, au lieu d'être égal à 1, est égal à -1.

La théorie des équations réciproques de seconde espèce est tout à fait analogue à celle des équations réciproques ordinaires.

3. Si l'équation $\varphi(z) = 0$ a ses racines réciproques et de signes contraires, elle a les mêmes racines que sa transformée en $-\frac{1}{z}$. On a donc identiquement, en désignant par λ un facteur constant approprié,

$$\varphi(z) = \lambda z^m \varphi\left(-\frac{1}{z}\right) \tag{1}$$

ou

$$\begin{gathered} A_0 z^m + A_1 z^{m-1} + A_2 z^{m-2} + \dots + A_{m-2} z^2 + A_{m-1} z + A_m \\ = \lambda A_m z^m - \lambda A_{m-1} z^{m-1} + \lambda A_{m-2} z^{m-2} - \dots \\ \pm \lambda A_2 z^2 \mp \lambda A_1 z \pm \lambda A_0, \end{gathered}$$

c'est-à-dire

$$\begin{gathered} A_0 = \lambda A_m, \qquad A_1 = -\lambda A_{m-1}, \qquad A_2 = \lambda A_{m-2}, \qquad \dots, \\ A_{m-2} = \pm \lambda A_2, \qquad A_{m-1} = \mp \lambda A_1, \qquad A_m = \pm \lambda A_0. \end{gathered}$$

Il en résulte, en rapprochant les égalités extrêmes,

$$\frac{A_0}{A_m} = \lambda = \pm \frac{1}{\lambda} \qquad \text{ou} \qquad \lambda^2 = \pm 1.$$

On a donc les deux solutions

$$\lambda = \pm 1 \qquad \text{et} \qquad \lambda = \pm i.$$

La première conduit aux conditions

$$A_0 = \pm A_m, \qquad A_1 = \mp A_{m-1}, \qquad A_2 = \pm A_{m-2}, \qquad \dots;$$

la seconde, aux conditions

$$A_0 = \pm i A_m, \qquad A_1 = \mp i A_{m-1}, \qquad A_2 = \pm i A_{m-2}, \qquad \dots.$$

Mais on peut ramener les équations considérées à un type unique, en remarquant que les seules racines qui paraissent se correspondre *à elles-mêmes* sont données par la relation

$$z = -\frac{1}{z} \quad \text{ou} \quad z^2 = -1,$$

c'est-à-dire

$$z = \pm i.$$

Admettons donc que l'équation $\varphi(z) = 0$ ne possède aucune racine égale à $+i$ ou à $-i$, et reprenons l'identité

$$(1) \qquad \varphi(z) = \lambda z^m \varphi\left(-\frac{1}{z}\right).$$

En y faisant $z = +i$, on a, puisque $-\frac{1}{i} = +i$,

$$(2) \qquad \varphi(i) = \lambda(i)^m \varphi(i);$$

en y faisant $z = -i$, on a également

$$(3) \qquad \varphi(-i) = \lambda(-i)^m \varphi(-i).$$

$\varphi(i)$ et $\varphi(-i)$ étant différents de zéro par hypothèse, on a, en multipliant membre à membre, les relations (2) et (3), et en simplifiant,

$$1 = \lambda^2(-i^2)^m = \lambda^2 \quad \text{ou} \quad \lambda = \pm 1.$$

Si l'on remplace maintenant λ par cette valeur, dans la relation (2) par exemple, il vient

$$\varphi(i) = \pm(i)^m \varphi(i) \quad \text{ou} \quad i^m = \pm 1;$$

ce qui exige que m soit *pair*.

Par suite, *lorsque l'équation réciproque de seconde espèce ne renferme aucune racine + i ou — i, la solution* $\lambda = \pm i$ *n'existe pas, l'équation est de degré pair,* *et les coefficients des termes à égale distance des extrêmes sont* ALTERNATIVEMENT *égaux et de même signe ou égaux et de signes contraires.*

Supposons maintenant que l'équation $\varphi(z) = 0$ admette des racines $+i$ et $-i$, et mettons-les en évidence en écrivant

$$\varphi(z) = (z-i)^p (z+i)^q f(z).$$

L'équation $f(z) = 0$ n'aura, par hypothèse, aucune racine égale à $+i$ ou à $-i$, et elle renfermera les autres racines, conjuguées deux à deux, de l'équation $\varphi(z) = 0$, supposée réciproque de seconde espèce. L'équation $f(z) = 0$ sera donc elle-même réciproque de seconde espèce, et elle remplira alors les conditions que nous venons d'énoncer.

Or, il est toujours facile de débarrasser préalablement l'équation considérée des racines $\pm i$ qu'elle peut avoir. En substituant $+i$ ou $-i$ dans le premier membre de l'équation, on voit facilement si le résultat obtenu est nul; et, dans l'affirmative, on n'a qu'à diviser ce premier membre par $z-i$ ou $z+i$, pour supprimer la racine correspondante.

Au point de vue de leur résolution, il est donc permis de ne conserver, parmi les équations réciproques de seconde espèce, que celles qui sont de degré pair et dont les coefficients également éloignés des extrêmes sont alternativement égaux et de même signe ou égaux et de signes contraires.

4. Le type de ces équations est

$$(4)\quad \left\{ \begin{aligned} &A_0 z^{2n} + A_1 z^{2n-1} + A_2 z^{2n-2} + A_3 z^{2n-3} + \ldots \\ &\qquad + A_n z^n + \ldots - A_3 z^3 + A_2 z^2 - A_1 z + A_0 = 0. \end{aligned} \right.$$

Si l'on pose

$$(5)\qquad z - \frac{1}{z} = u.$$

chaque couple de racines conjuguées $\left(\alpha \text{ et } -\frac{1}{\alpha}\right)$ conduit à une seule valeur de u qui est $\left(\alpha - \frac{1}{\alpha}\right)$. En éliminant z entre les équations (4) et (5), on obtiendra une équation en u de degré *moitié* ou de degré n.

Rapprochons dans le premier membre de l'équation (4) les termes également éloignés des extrêmes, après avoir divisé par z^n les deux membres de l'équation. On a ainsi

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} &A_0\left(z^n + \frac{1}{z^n}\right) + A_1\left(z^{n-1} - \frac{1}{z^{n-1}}\right)\\ &\qquad + A_2\left(z^{n-2} + \frac{1}{z^{n-2}}\right)\\ &\qquad + A_3\left(z^{n-3} - \frac{1}{z^{n-3}}\right) + \ldots = 0.\end{aligned}\right.$$

Il ne reste plus qu'à calculer en fonction de u les binômes

$$z^n + \frac{1}{z^n},\quad z^{n-1} - \frac{1}{z^{n-1}},\quad z^{n-2} + \frac{1}{z^{n-2}},\quad z^{n-3} - \frac{1}{z^{n-3}},\quad \ldots,$$

où les signes + et — alternent. Pour cela, nous aurons recours à la relation générale

$$\left(z^k \pm \frac{1}{z^k}\right)\left(z - \frac{1}{z}\right) = z^{k+1} \mp \frac{1}{z^{k+1}} - z^{k-1} \mp \frac{1}{z^{k-1}},$$

où l'on doit prendre ensemble les signes supérieurs et les signes inférieurs.

Il en résulte donc

$$(7)\qquad z^{k+1} \pm \frac{1}{z^{k+1}} = \left(z^k \mp \frac{1}{z^k}\right)u + \left(z^{k-1} \pm \frac{1}{z^{k-1}}\right).$$

En prenant alternativement les signes supérieurs et les signes inférieurs, cette formule donne l'expression d'un binôme quelconque en fonction de u, à l'aide des valeurs des deux binômes précédents. En partant des deux binômes $z - \frac{1}{z} = u$ et $z^0 + \frac{1}{z^0} = 2$, et en faisant successivement $k = 1, 2, 3, 4, \ldots$, nous aurons

$$z^2 + \frac{1}{z^2} = \left(z - \frac{1}{z}\right) u + \left(z^0 + \frac{1}{z^0}\right) = u^2 + 2,$$

$$z^3 - \frac{1}{z^3} = \left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right) u + \left(z - \frac{1}{z}\right) = u^3 + 3u,$$

$$z^4 + \frac{1}{z^4} = \left(z^3 - \frac{1}{z^3}\right) u + \left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right) = u^4 + 4u^2 + 2,$$

$$z^5 - \frac{1}{z^5} = \left(z^4 + \frac{1}{z^4}\right) u + \left(z^3 - \frac{1}{z^3}\right) = u^5 + 5u^3 + 5u,$$

. . . .

Il est évident d'ailleurs que ces binômes sont bien ceux qu'on a à calculer; car, le premier terme de l'équation donnée étant supposé toujours positif, et les racines conjuguées deux à deux ayant un produit égal à -1, le dernier terme est alternativement négatif et positif dans les équations successives du deuxième, du quatrième, du sixième, du huitième, du dixième degré, ... qu'on peut avoir à considérer.

On voit que l'équation en u sera bien de degré n. Quand on l'aura résolue, les racines de l'équation en z seront fournies par la relation générale $z - \frac{1}{z} = u$, c'est-à-dire par l'équation du second degré

$$z^2 - uz - 1 = 0, \tag{8}$$

dont le produit des racines est, pour chaque valeur de u et comme cela doit être, égal à -1. On a

$$z = \frac{u \pm \sqrt{u^2 + 4}}{2},$$

et les n valeurs de u conduisent ainsi aux $2n$ valeurs de z.