NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

G. LEINEKUGEL

Solution géométrique de la question proposée au concours général en 1889

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 8 (1889), p. 288-298

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1889_3_8__288_0>

SOLUTION GÉOMÉTRIQUE DE LA QUESTION PROPOSÉE AU CONCOURS GÉNÉRAL EN 1889;

PAR M. G. LEINEKUGEL,
Élève de Mathématiques spéciales au lycée de Douai.

On donne un cercle ayant pour centre le point O *et une parabole* P, *on considère les coniques* C *inscrites dans le quadrilatère formé par les tangentes communes au cercle et à la parabole. Cela posé, on demande :*

1° *De trouver l'enveloppe des polaires* A *du centre* O *par rapport aux coniques* C ;

2° *L'enveloppe des tangentes* δ *aux coniques* C *telles que la normale au point de contact passe par* O ; *l'enveloppe des axes des coniques* C. *Le lieu géométrique des pieds des perpendiculaires abaissées de* O *sur* A, *sur les tangentes* δ *et sur les axes de* C.

1° Nous nous appuierons sur cette propriété bien connue (CHASLES, *Traité des Sections coniques*) :

Le lieu des centres (c) *des coniques circonscrites à un quadrilatère donné est une hyperbole équilatère.*

Cette hyperbole équilatère, dite hyperbole des neuf points, passe, comme on le sait, par les sommets du triangle formé par les diagonales du quadrilatère, par les milieux des côtés et des diagonales intérieures. Elle a pour centre le centre de gravité du quadrilatère.

Si l'on suppose que le quadrilatère *abcd* auquel sont circonscrites les coniques (c) est déterminé par l'intersection d'un cercle (O) et d'une conique (p), l'hyperbole équilatère (h) des neuf points relative aux coniques (C) aura ses asymptotes parallèles aux bissectrices de deux côtés du quadrilatère, puisque ce sont les directions des axes des deux paraboles circonscrites à *abcd*.

Les axes des coniques (c) sont, d'ailleurs, parallèles à ces mêmes droites (théorème de Joachimstahl).

Cette hyperbole équilatère (h) passera par le centre du cercle (O) qui fait partie de la famille des coniques (c) circonscrites à *abcd*. Supposons en outre que la conique (p) passe par le centre de (O).

Si nous transformons la figure précédente par polaires réciproques par rapport au cercle (O), nous obtenons la réponse à la première question :

L'enveloppe de la polaire A *du centre d'un cercle* (O) *par rapport aux coniques* (C) *inscrites dans le quadrilatère circonscrit au cercle* (O) *et à une parabole donnée* (P) *est une parabole* (H) *inscrite dans le triangle autopolaire commun aux coniques* (C) *et admettant pour directrice la droite qui joint les milieux des diagonales du quadrilatère circonscrit à* (O) *et à* (P).

Cette parabole (H) est la transformée de (h) par rapport à (O). De sorte qu'au lieu des pôles a de la droite de l'infini par rapport aux coniques (c) correspond l'enveloppe de la polaire A du centre de (O) par rapport aux coniques (C).

Cette transformée est une parabole parce que (h) passe par le centre du cercle (O). De plus, comme l'hyperbole équilatère (h) passait par les milieux des côtés et des diagonales intérieures du quadrilatère *abcd*, les six droites menées par les six sommets du quadrilatère ABCDEF [circonscrit à (O), les points de contact étant *a*, *b*, *c*, *d*] parallèlement à leurs polaires respectives seront six tangentes à cette parabole (H).

On peut voir *a priori* que les quatre droites AC, BD, EF et la droite de l'infini sont des tangentes à l'enveloppe cherchée. Les trois droites AC, BD, EF peuvent, en effet, être considérées comme représentant trois coniques inscrites dans le quadrilatère ABCDEF. Les polaires de *o* par rapport à ces coniques réduites à des droites doubles sont précisément ces droites. Quant à la droite de l'infini, c'est la polaire de *o* par rapport au cercle (O) qui appartient aux coniques (C) inscrites dans le quadrilatère ABCDEF.

L'hyperbole (*h*) passant par les sommets du triangle MNP formé par les diagonales de *abcd*, la parabole (H) sera inscrite dans ce triangle. Sa direction passera, par suite, par le centre *o* de (O) puisque MNP est autopolaire par rapport à ce cercle. Je dis maintenant que cette directrice est précisément la droite joignant les milieux des diagonales du quadrilatère ABCDEF qui contient *o* et qui est appelée *droite de Newton*.

Nous nous appuierons pour cela sur ces deux propriétés :

Lemme I. — *L'hyperbole* (*h*) *lieu des centres des coniques* (*c*) *passant par l'intersection d'un cercle* (O) *et d'une conique* (*p*) *qui passe par son centre* O *a pour tangente en ce point o la normale à* (*p*).

Lemme II. — *Quand on transforme par polaires réciproques une parabole, le centre du cercle* (O) *par rapport auquel on transforme étant sur la directrice, on* *obtient une hyperbole équilatère tangente à la directrice au centre du cercle* (O) *et réciproquement* [1].

Cela posé, quand nous transformons la conique (p), la direction des diamètres de la parabole (P) transformée de (p) par rapport à (O) est la droite Δ de Newton relative au quadrilatère ABCD.

Cette droite n'est autre que la normale à (p) en o, qui est la tangente à (h) en ce point (lemme I) et, d'après le lemme II, ce sera la directrice de (H).

Comme les parallèles menées par ABCD à leurs polaires par rapport à (O) sont quatre tangentes à (H), il résulte de là que le quadrilatère inscriptible $\alpha\beta\gamma\delta$ ainsi formé est tel que la droite Δ' qui joint les milieux de ses diagonales est perpendiculaire à la droite Δ de Newton du quadrilatère ABCD, d'où ce théorème :

Théorème I. — *Si, par les quatre sommets d'un qua-*

---

[1] Considérons une hyperbole équilatère (h) de centre G (α, β),

$$(h) \qquad xy - \beta y - \alpha x = 0,$$

$$(o) \qquad x^2 + y^2 - \rho^2 = 0.$$

La transformée par polaires réciproques sera, par rapport au cercle (O),

$$(\mathrm{H}) \qquad (\alpha y - \beta x - \rho^2)^2 - 4\beta^2\rho x = 0,$$

qui est une parabole (H) admettant pour direction des diamètres la droite $\alpha y - \beta x = 0$ perpendiculaire à la droite $\beta y + \alpha x = 0$ qui est la tangente en o à (h). Cette parabole est de plus tangente aux deux parallèles, aux asymptotes de (h) menées par le centre o de (O).

Sa directrice est la droite $\beta y + \alpha x = 0$ perpendiculaire à la direction des diamètres et passant par l'origine qui est le sommet d'un angle droit circonscrit à (H). On voit que cette directrice n'est autre que la tangente à (h) en ce point o.

Cette droite $\beta y + \alpha x = 0$ est parallèle à la polaire du centre G (α, β) de (h) par rapport à (O) qui a pour équation

$$\beta y + \alpha x - \rho^2 = 0.$$

drilatère circonscrit à un cercle, on mène des parallèles à leurs polaires par rapport au cercle, ces quatre dernières droites forment un second quadrilatère qui est tel que la droite qui joint les milieux de ses diagonales est perpendiculaire à la droite analogue dans le premier.

La droite Δ' donne en effet la direction des diamètres de H.

Cette seconde partie se déduira immédiatement de la propriété suivante, que nous allons établir :

Lemme III. — *L'hyperbole aux pieds des normales menées du centre d'un cercle à l'une des coniques qui sont circonscrites à un quadrilatère inscrit dans ce cercle est la même pour toutes les coniques et coïncide avec l'hyperbole des neuf points relative à ce quadrilatère.*

En effet, considérons l'une des coniques (c_1) ; l'hyperbole (h_1) aux pieds des normales menées de o à (c_1) n'est autre que l'hyperbole (h). Les axes de (c_1) sont, comme on le sait, parallèles aux bissectrices de deux des côtés du quadrilatère $abcd$; c'est-à-dire que les asymptotes de (h) et (h_1) sont parallèles. De plus, (h) et (h_1) ont encore en commun le centre o du cercle (O) et le centre de la conique (c_1) considérée ; pour qu'elles coïncident, il suffit de montrer qu'elles ont un cinquième point commun. Or, si nous montrons que ceci a lieu pour l'une des coniques (c), il est évident, par raison de continuité, que ce sera vrai pour l'une quelconque des coniques (C).

Prenons, à cet effet, les coniques particulières (ac, bd), (ab, dc) et (ad, bc) ; les pieds des normales menées de o sur (ac, bd) sont les milieux des segments ac et bd. Or ces points appartiennent à h.

Pour cette conique (c) particulière les deux hyperboles coïncident; il en est de même pour les coniques (ab, dc) ; la propriété est par suite démontrée.

Si l'on transforme par rapport au cercle (O), nous en déduisons :

L'enveloppe des tangentes δ *aux coniques* (C) *inscrites dans un quadrilatère circonscrit à un cercle* (O) *et à une parabole* (P) *aux points où la normale passe par le centre* o *de* (O) *est la parabole* (H) *tangente aux côtés du triangle autopolaire commun aux coniques* (C) *et admettant pour directrice la droite de Newton* Δ *relative à ce quadrilatère.*

Remarquons que cette parabole (H) a son axe perpendiculaire à celui de (P) ; par suite, *les paraboles* (P) *et* (H) *se coupent en quatre points formant un quadrilatère inscriptible dans un cercle.*

Nous rappelons, pour trouver l'enveloppe des axes, cette propriété bien connue :

Le lieu des centres des coniques inscrites dans un quadrilatère est la droite joignant les milieux des diagonales; cette droite est dite droite de Newton relative à ce quadrilatère.

Je dis que l'enveloppe des axes des coniques (C) est la parabole (H) déjà trouvée.

Considérons, en effet, un point ω sur la droite de Newton relative au quadrilatère ABCD ; il existe une et *une seule* conique (C) tangente à trois côtés du quadrilatère et admettant ce point ω pour centre. Elle sera évidemment tangente au quatrième côté. Puisqu'il n'existe qu'*une seule* conique (C) admettant ce point ω pour centre, il n'y a que deux droites rectangulaires qui passent par ce point et qui soient tangentes à l'enveloppe cherchée. Cette enveloppe de seconde classe sera conséquemment une conique. Cette conique étant telle que le lieu des sommets des angles droits qui lui sont circonscrits est une droite Δ, c'est une parabole admettant Δ pour directrice.

Si l'on considère les coniques particulières AC, BD, EF, on voit que ces droites et les perpendiculaires en leurs milieux sont six droites tangentes à cette parabole qui est précisément la parabole H comme ayant en commun avec elle trois tangentes et la directrice.

Nous déduisons de ce qui précède les propriétés remarquables, peut-être nouvelles, du quadrilatère circonscrit à un cercle.

Théorème II. — *Les perpendiculaires aux diagonales d'un quadrilatere circonscrit à un cercle en leurs milieux forment un triangle dont le point de concours des hauteurs est sur la droite de Newton de ce quadrilatère.*

Théorème II *bis*. — *Étant donné un quadrilatère quelconque, il existe toujours une parabole* (H) *tangente aux trois diagonales et admettant pour directrice la droite de Newton de ce quadrilatère.*

Théorème III. — *Étant donné un quadrilatère* ABCD *circonscrit à un cercle* (O), *si l'on circonscrit le cercle* (Γ_1) *au quadrilatère* $\alpha\beta\gamma\delta$ *obtenu en menant des points* A, B, C, D *des parallèles à leurs polaires par rapport à* (O), *et les cercles* (Γ_2), (Γ_3) *circonscrits aux triangles formés, l'un par les trois diagonales de* ABCD, *l'autre par les perpendiculaires élevées aux milieux de ces diagonales, on obtient trois cercles* (Γ_1), (Γ_2) *et* (Γ_3) *se coupant en un même point. Les projections orthogonales de ce point sur les côtés des* *deux triangles et sur les côtés du quadrilatère* $\alpha\beta\gamma\delta$ *sont dix points situés sur une droite perpendiculaire à la droite de Newton relative au quadrilatère* ABCD.

THÉORÈME IV. — *Étant donné un quadrilatère circonscrit à un cercle, si l'on trace les symétriques des trois diagonales par rapport à la droite de Newton relative à ce quadrilatère, on obtient trois droites concourantes sur le cercle circonscrit au triangle formé par les trois diagonales.*

THÉORÈME V. — *La perpendiculaire menée du centre* o *d'un cercle* (O) *à la droite de Newton relative à un quadrilatère circonscrit à ce cercle passe par le centre* G *de gravité du quadrilatère inscrit dans ce cercle et qui a pour sommets les points de contact du premier.*

Ce dernier théorème résulte de ce que la polaire (¹) du centre de gravité G du quadrilatère inscrit par rapport au cercle est parallèle à la droite de Newton du quadrilatère circonscrit, de sorte que GO est perpendiculaire à la droite de Newton.

Remarquons que la première et la troisième question sont susceptibles de *généralisation*.

1° *L'enveloppe de la polaire* A *d'un point de la droite de Newton d'un quadrilatère quelconque par rapport aux coniques* (C) *inscrites dans ce quadrilatère est une parabole* (H_1) *inscrite de ce triangle autopolaire commun aux coniques* (C).

2° *L'enveloppe des axes des coniques* (C) *inscrites dans un quadrilatère quelconque est la parabole* (H)

(¹) La polaire de G est donc bien parallèle à la directrice, c'est à-dire à la droite de Newton.

inscrite dans le triangle autopolaire commun aux coniques (C), *sa directrice étant la droite* Δ *de Newton de ce quadrilatère.*

Il n'y a rien à modifier, pour la démonstration, aux méthodes données. Les paraboles (H) et (H_1) ne coïncident que si le quadrilatère est circonscrit à un cercle. Il résulte de cette généralisation que les théorèmes II et IV sont encore vrais pour un quadrilatère quelconque.

La seconde question ne peut se généraliser, car le lieu dans le cas d'un quadrilatère quelconque est une quartique qui, lorsque le quadrilatère est circonscrit à un cercle, se décompose en deux coniques : le cercle et la parabole (H).

Cherchons maintenant la polaire de O par rapport à cette parabole remarquable; nous résolvons ainsi la dernière partie de la question.

Cette polaire sera *une cubique circulaire unicursale* à point double réel. puisque le point *o* se trouve sur la directrice de (H). Les tangentes au point double seront rectangulaires; pour les construire, il suffira de mener par *o* des parallèles aux asymptotes de (*h*) ; ces droites sont en effet les tangentes à (H) qui passent par *o*.

Ces asymptotes sont parallèles aux bissectrices des angles formés par deux des côtés du quadrilatère *abcd* : on a donc les tangentes au point double.

Nous voyons immédiatement, d'après ce que nous avons dit sur la parabole (H), que cette cubique passera par les six sommets du quadrilatère ABCDEF et aussi par les pieds *m*, *n*, *p* des hauteurs du triangle MNP formé par les trois diagonales du quadrilatère [ce sont en effet les pieds des perpendiculaires abaissées de *o* sur ce triangle MNP autopolaire par rapport à (O)].

Cette cubique (Γ) passe aussi par les pieds ω_1, ω_2, ω_3 des perpendiculaires abaissées de o sur le triangle formé par les perpendiculaires élevées aux milieux des diagonales de ABCD. Ainsi cette cubique circulaire passe par les douze points A, B, C, D, E, F, m, n, p, ω_1, ω_2, ω_3.

Elle admet de plus comme asymptote la parallèle à la droite de Newton Δ de ABCD menée par le symétrique du foyer de H par rapport à Δ. Ceci résulte de la propriété suivante :

Les podaires des différents points de la directrice d'une parabole sont des cubiques circulaires (Γ) *admettant toutes même asymptote, qui est la parallèle à la directrice menée par le symétrique du foyer de la parabole par rapport à la directrice* [1].

Cette cubique (Γ) est suffisamment déterminée.

Cette cubique (Γ) n'est autre que la cubique (Γ'_1) que l'on trouve comme lieu des foyers des coniques (C) inscrites dans le quadrilatère ABCD. En effet, ces cubiques ont d'abord à l'infini trois points communs : les deux points circulaires I et J, et le point rejeté à l'infini dans la direction de la droite Δ de Newton de ABCD. Car on sait que la cubique (Γ'_1) circulaire passe par les six sommets du quadrilatère ABCDEF et a pour asymptote la droite parallèle à Δ menée par la symétrique du foyer de la parabole (P) par rapport à Δ. Outre ces trois

---

[1] Soit l'équation de (H)

$$(\mathrm{H}) \qquad y^2 - 2px + p^2 = 0,$$

la podaire du point (o, h) situé sur la directrice de (H) sera

$$(\Gamma) \quad x[x^2 + (y-h)^2] + 2hx(y-h) - p[x^2 - (y-h)^2] = 0,$$

la cubique circulaire (Γ) admettant pour asymptote

$$x + p = 0.$$

points à l'infini, les deux cubiques (Γ) et (Γ'_1) ont en commun les six sommets de ABCDEF. Ayant neuf points communs, elles coïncident donc. De ce que les asymptotes des deux cubiques (Γ) et (Γ'_1) coïncident, nous en concluons :

Théorème VI. — *Étant donné un quadrilatère circonscrit à un cercle* (O), *si l'on considère les deux paraboles* (P) *et* (H) *qui sont l'une inscrite dans ce quadrilatère, l'autre inscrite dans le triangle formé par les diagonales et admettant pour directrice la droite de Newton* Δ *de ce quadrilatère, elles ont pour foyers deux points tels que la droite qui les joint est parallèle à* Δ.

Théorème VII. — *La cubique* (Γ) *lieu des foyers des coniques inscrites dans un quadrilatère circonscrit à un cercle* (o) *peut être considérée comme la podaire du centre* O *de ce cercle par rapport à la parabole* (H).