Nouvelles annales de mathématiques

C. Bourlet

Sur les polyèdres

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 8 (1889), p. 366-389

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1889_3_8__366_1>

SUR LES POLYÈDRES;

PAR M. C. BOURLET.

Définition. — Un *polyèdre* est une surface composée de polygones plans, à contour unique ou à contour multiple [1], ayant deux à deux un côté commun, de telle façon que deux polygones voisins n'aient pas leurs plans confondus et qu'un côté quelconque de l'un de ces polygones appartienne toujours à un autre polygone et à *un seul autre*.

Les *portions de plan*, limitées par ces polygones, et composées des points *intérieurs* à ces polygones sont appelées les *faces* du polyèdre. Les côtés de ces polygones sont les *arêtes*, et les sommets, les *sommets du polyèdre*.

Remarque I. — Nous supposerons dans tout ce qui

(1) Un polygone plan est dit à *contour unique* si l'on peut aller d'un point quelconque de ce contour à un autre point de ce même contour en suivant le contour. Dans le cas contraire, on dira que le contour est *multiple*.

suivra que le polyèdre est à *surface unique*, c'est-à-dire qu'on peut aller d'un point quelconque de la surface à un autre point de cette surface par un chemin continu tracé tout entier sur elle. Toute surface répondant aux conditions de la définition et ne satisfaisant pas à cette dernière serait un ensemble de plusieurs polyèdres à surface unique.

Remarque II. — Il pourra arriver que deux *faces* (¹) se coupent, c'est-à-dire que deux *faces* aient en commun des points non situés sur des arêtes. Il ne faudra pas confondre ces droites d'intersection de deux faces avec les arêtes : nous les appellerons *droites singulières* du polyèdre.

Remarque III. — Il résulte de la définition que par toute arête il passe deux faces et deux faces seulement et qu'à tout sommet aboutissent *au moins trois* arêtes.

Remarque IV. — Les arêtes étant des portions limitées de droites, il en résulte que, si un plan se déplace parallèlement à lui-même, il devra arriver un moment où il ne rencontrera plus aucune arête, car sans cela il y aurait des arêtes illimitées. Donc on peut toujours trouver un plan parallèle à un plan donné et qui ne coupe aucune des arêtes du polyèdre. De même, les faces étant des portions de plans limitées par des contours fermés, on pourra toujours trouver une droite parallèle à une droite donnée et qui ne rencontre aucune des faces du polyèdre.

(¹) Je rappelle que le mot *face* désigne une *portion de plan* limitée par un polygone. Il ne faut pas confondre la *face* et le *plan de la face*

THÉORÈME I. — *Toute droite* indéfinie *coupe un polyèdre en un nombre* pair *de points.*

Remarquons d'abord que, quand une droite D se déplace, si un des points d'intersection de cette droite avec le polyèdre disparaît, il disparaîtra en même temps un autre point d'intersection et *un seul*. En effet, pour que le point d'intersection P de D avec une face F disparaisse, quand D se déplace, il faut que ce point vienne rencontrer un côté A de la face F, c'est-à-dire que la droite D rencontre une arête A du polyèdre; or, une arête A d'un polyèdre étant toujours commune à deux faces F et F', et à deux seulement, il pourra se présenter deux cas : ou bien la droite D rencontrait F' en un point P' *avant* de traverser A, et alors, quand D rencontre A et la *dépasse*, P et P' viennent se confondre et disparaissent en même temps; ou bien D ne rencontrait pas F' *avant* de traverser A, mais alors D rencontrera F' en un point P' *après* avoir traversé A, et le point P disparu sera remplacé par le point P'. Donc, quand une droite D se déplace, il apparaît ou il disparaît toujours un nombre pair de points d'intersection : la parité du nombre des points d'intersection avec le polyèdre est donc la même pour toutes les droites de l'espace. Or, d'après la remarque IV, il existe toujours une droite qui *ne coupe pas le polyèdre :* donc toute droite indéfinie coupe le polyèdre en un nombre pair de points.

THÉORÈME II. — *Si l'on considère un polyèdre et un point fixe* P *dans l'espace, non situé sur le polyèdre, la parité du nombre des points d'intersection d'une* semi-droite, *issue de* P, *avec le polyèdre, est toujours la même quelle que soit la direction de cette semi-droite dans l'espace.*

Ceci résulte immédiatement du fait, démontré dans le théorème I, que, quand une semi-droite tourne autour de P, le nombre des points d'intersection qui apparaît ou qui disparaît est toujours *pair*.

Ce théorème nous permet de classer les points de l'espace en deux groupes par rapport au polyèdre.

Définition. — Un point, non situé sur l'une des faces du polyèdre, est dit *extérieur* au polyèdre si le nombre des points d'intersection des semi-droites, issues de ce point, avec le polyèdre est *pair*. Quand ce nombre est *impair*, le point est dit *intérieur* au polyèdre.

L'ensemble des points intérieurs au polyèdre forme ce que nous appellerons *l'intérieur du polyèdre*; nous montrerons plus loin que c'est une grandeur mesurable et sa mesure sera ce que nous appellerons le *volume* du polyèdre.

Remarque. — Il résulte de la définition des points intérieurs que toute semi-droite issue d'un tel point coupe le polyèdre *au moins en un point*.

Théorème III. — *Si un plan* Π *ne coupe pas un polyèdre* P :

1° *Le polyèdre* P *est situé tout entier d'un même côté de* Π;

2° *Tous les points de* Π *et tous les points situés d'un côté de* Π *différent que* P *sont extérieurs à* P ;

3° *Tous les points intérieurs à* P *sont situés d'un même côté de* Π *que* P.

En effet :

1° Supposons que deux points A et B, appartenant à P, soient situés de part et d'autre de Π. Alors, tout chemin *continu* allant de A en B traverserait nécessairement le plan Π et, comme Π ne contient *aucun point* de P, on ne pourrait aller de A en B par un chemin continu tracé *tout entier* sur la surface de P. Il ne peut donc y avoir deux points de P situés de part et d'autre de Π.

2° Soit E un point situé sur Π ou de côté différent de Π que P. Si l'on mène par E une semi-droite parallèle au plan Π, cette semi-droite ne rencontrera pas P : donc E est extérieur.

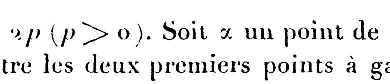
3° Soit I un point intérieur à P. Menons par I une semi-droite parallèle au plan Π; puisque I est intérieur à P, cette semi-droite coupera P au moins en un point C. Mais le segment de droite IC, étant parallèle à Π, ne rencontre pas Π; I et C sont donc d'un même côté de Π : donc P et I sont d'un même côté de Π, puisque tous les points de P sont d'un même côté de Π et que C appartient à P.

Définition. — Quand le nombre des points d'intersection des semi-droites issues d'un point quelconque *intérieur* à un polyèdre est toujours égal à *un*, le polyèdre est dit *convexe*.

Théorème IV. — *Toute droite indéfinie coupe un polyèdre convexe en zéro ou deux points.*

En effet, soient (*fig.* 1) $A_1, A_2, \ldots, A_{2p}$ les points d'intersection d'une droite indéfinie avec le polyèdre au

Fig. 1.



nombre de $2p$ $(p > 0)$. Soit α un point de cette droite compris entre les deux premiers points à gauche A_1 et A_2; la semi-droite αA_{2p} coupera la surface en $2p-1$ points : donc le point α est intérieur au polyèdre et l'on a

$$2p-1=1 \quad \text{et} \quad p=1.$$

Donc, si p n'est pas nul, on a nécessairement $p=1$.

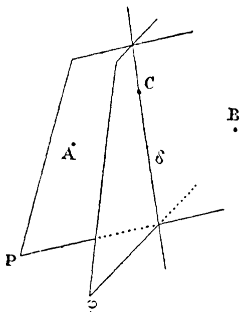
Réciproquement, si une droite indéfinie coupe un polyèdre en deux points au plus, ce polyèdre est convexe : car, les semi-droites issues d'un point intérieur coupant le polyèdre en un nombre impair de points, ce nombre impair, étant au plus égal à 2, est nécessairement égal à 1.

Remarque. — Il suit de là que si P et P′ sont deux points, situés sur la surface d'un polyèdre convexe et non situés dans une même face, tout point situé sur le segment de droite PP′ est *à l'intérieur* du polyèdre.

Théorème V. — *Si l'on prolonge indéfiniment le plan d'une face quelconque d'un polyèdre convexe, le polyèdre est situé tout entier d'un même côté de ce plan.*

En effet, soit (*fig.* 2) φ le plan de la face F et supposons qu'il y ait, de part et d'autre de φ, deux points A

Fig. 2.



et B appartenant au polyèdre; soit alors C un point quelconque de la face F et considérons le plan P qui passe par les trois points A, B et C; ce plan coupera le polyèdre suivant un polygone dont un des côtés sera situé sur la droite δ, intersection des plans P et φ, et contiendra le point C. D'ailleurs ce polygone passera en A et B : donc il ne sera pas convexe, puisque A et B sont de part et d'autre de δ. On pourra donc trouver une droite D, située dans le plan P, qui coupera le polygone en plus de deux points et, par suite, qui coupera le polyèdre en plus de deux points. Le polyèdre n'est donc pas convexe.

Réciproquement, si un polyèdre est tel qu'en prolongeant indéfiniment le plan de l'une quelconque de ses faces le polyèdre soit situé tout entier d'un même côté de ce plan, ce polyèdre est convexe.

Car, si le polyèdre n'était pas convexe, on pourrait trouver un point intérieur α et une semi-droite αx, issue de α, tels que αx coupe le polyèdre en plus d'un point, par exemple en trois points A_1, A_2, A_3; mais alors, en prolongeant le plan de la face à laquelle appartient le point du milieu A_2, A_1 et A_3 seraient de part et d'autre de ce plan et le polyèdre ne serait pas tout entier d'un même côté de ce plan.

Corollaire I. — Les faces d'un polyèdre convexe sont des polygones convexes.

Corollaire II. — Un polyèdre convexe n'a pas de droites singulières.

Théorème VI. — *Tout point intérieur à un polyèdre convexe est situé, par rapport au plan de chacune des faces, du même côté que le polyèdre, et réciproquement, si un point est situé, par rapport au plan de chacune des faces, du même côté que le polyèdre, il est intérieur.*

La proposition directe résulte de la troisième partie du théorème III; démontrons la réciproque :

Soit A un point situé par rapport à toutes les faces du polyèdre convexe P, du même côté que ce polyèdre;

soit α un point pris dans une face. Si A était extérieur à P, la semi-droite Aα couperait le polyèdre en un second point β et un seul. Soit alors F la face qui contient celui des deux points α ou β qui est le plus voisin de A : A et l'autre point d'intersection seraient alors situés de part et d'autre du plan de F et, par conséquent, A et le polyèdre P seraient situés de part et d'autre de ce plan, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Corollaire. — Si un point A est extérieur à un polyèdre *convexe* P, il existe au moins une face de P telle que A et le polyèdre P soient de part et d'autre du plan de cette face.

Ici se placeraient maintenant, dans un cours complet sur les polyèdres, la définition et l'étude des polyèdres convexes simples : prismes et pyramides, troncs de prismes et troncs de pyramides, ainsi que la recherche de l'expression de leur volume. Nous laissons au lecteur le soin de faire cette étude en restant dans l'ordre d'idées dans lequel nous nous sommes placé et nous passons immédiatement aux polyèdres *non convexes,* en considérant cette étude comme faite.

Définition. — On dira qu'un polyèdre P est *décomposé* en un certain nombre k de polyèdres, si l'on a trouvé k polyèdres P_1, P_2, ..., P_k satisfaisant aux conditions suivantes :

1° Un point quelconque situé à l'*intérieur* de l'un de ces polyèdres est *extérieur* à tous les autres;

2° Deux polyèdres peuvent avoir en commun une face, ou une arête, ou un sommet;

3° Si l'on supprime les faces et les arêtes communes dans tous ces polyèdres, la figure formée par les faces restantes est identique au polyèdre P.

LEMME. — *Si deux polyèdres convexes* P *et* P′ *sont tels qu'ils sont tous deux situés d'un même côté du plan de l'une quelconque des faces de l'un d'eux, ces deux polyèdres coïncident.*

Pour démontrer ce lemme, nous allons montrer que tout point intérieur à l'un est intérieur à l'autre et que tout point extérieur à l'un est extérieur à l'autre. Soit I un point intérieur à P, et soit F′ une face quelconque de P′, I et P sont situés d'un même côté du plan φ' de F′ puisque I est intérieur à P (théorème III) : donc I et P′ sont situés d'un même côté de φ'. I, étant du même côté que P′ par rapport aux plans des faces de P′, est, en vertu du théorème VI, intérieur à P′. On verrait de même que tout point intérieur à P′ est intérieur à P.

Soit E un point extérieur à P. D'après le corollaire du théorème VI, il existe au moins une face F de P telle que E et P soient de part et d'autre du plan φ de F; mais alors, comme P et P′ sont d'un même côté de φ, on en conclut que E et P′ sont de part et d'autre de φ. Donc (théorème III) E est extérieur à P′.

L'identité des points intérieurs et extérieurs à P et P′ entraîne nécessairement celle des points situés sur ces surfaces.

THÉORÈME VII. — *Tout polyèdre qui n'est pas convexe est* décomposable *en polyèdres convexes.*

Soit P un polyèdre non convexe dont les faces sont $F_1, F_2, \ldots, F_n$. Prolongeons indéfiniment, dans tous les sens, le plan φ_1 de la face F_1 et, si ce plan rencontre le polyèdre, nous imaginerons qu'il le *coupe*.

Précisons ceci : le plan φ_1 pourra couper certaines des faces $F_2, \ldots, F_n$ suivant des segments de droite et partagera ainsi ces faces en deux polygones ayant un côté commun. Imaginons alors que l'on considère, pour un instant, le plan φ_1 comme résultant de la superposition de deux plans φ'_1 et φ''_1 situés, l'un à gauche, l'autre à droite de φ_1 ; et chacun de ces segments de droite comme deux segments de droite superposés situés l'un dans φ'_1 et l'autre dans φ''_1. En outre, considérons chacun des côtés de F_1 comme tracé dans celui des deux plans φ'_1 ou φ''_1 qui se trouve, par rapport à φ_1, du même côté que la face, différente de F_1, à laquelle appartient ce côté (ceci revient à dire qu'on laisse chaque côté dans la face, différente de F, à laquelle il appartient).

Nous avons ainsi imaginé deux systèmes de segments de droite situés dans les plans φ'_1 et φ''_1. Il est aisé de se rendre compte que les segments de droite (intersections de φ_1 avec les faces $F_2, \ldots, F_n, \ldots$ et côtés de F_1) tracés dans l'un quelconque de ces deux plans forment un polygone *fermé*, à contour unique ou multiple, en remarquant que l'extrémité d'un quelconque de ces segments de droite est sur une arête, que par une arête il passe toujours deux faces et par conséquent que toute extrémité d'un de ces segments est l'extrémité d'un autre.

Cela étant, considérons les *portions* des plans φ'_1 et φ''_1 limitées par ces deux polygones et composées des *points intérieurs* à ces polygones, que nous appellerons F'_1 et F''_1. Remplaçons alors dans le polyèdre P chacune des faces $F_2, \ldots, F_n$ par deux faces ayant un côté commun situé dans le plan φ_1 et la face F_1 par les deux faces F'_1 et F''_1.

Par cette opération, nous aurons substitué au polyèdre P un ou plusieurs polyèdres répondant bien à la définition des polyèdres (cela est aisé à voir) et jouissant des propriétés suivantes :

1° Chacun de ces polyèdres est situé tout entier d'un même côté du plan φ_1.

2° Si l'on supprime dans ces polyèdres les arètes et les portions de faces communes, l'ensemble des arètes et des faces restantes reproduit le polyèdre P.

Cela fait, imaginons qu'on prolonge de même, dans tous les sens, le plan φ_2 de la face F_2 et, si ce plan rencontre les faces des nouveaux polyèdres, nous imaginerons de nouveau qu'on ait tracé les segments de droite d'intersection avec ces faces. Nous recommencerons la même opération que précédemment en remplaçant chacune des faces rencontrées par deux faces ayant un côté commun et en introduisant deux nouvelles faces situées dans le plan φ_2. Nous aurons ainsi substitué aux nouveaux polyèdres et, par suite, au polyèdre P, des polyèdres tels que :

1° Ils sont situés d'un même côté de φ_1 et φ_2;

2° Si l'on supprime les arètes et les portions de faces communes, on reproduit P.

Nous prolongerons ensuite φ_3 et ainsi de suite jusqu'à φ_n. Au bout de la $n^{\text{ième}}$ opération, nous aurons substitué à P plusieurs polyèdres P_1, P_2, ..., P_k jouissant des propriétés suivantes :

1° Ils sont tous *convexes,* car le plan de l'une quelconque des faces de l'un d'eux est un des plans φ_1, φ_2, ..., φ_n et chacun d'eux est situé tout entier d'un même côté de l'un quelconque de ces plans;

2° Si l'on supprime les faces communes et les arètes communes, les faces restantes constituent le polyèdre P;

3° Un point quelconque intérieur à l'un de ces polyèdres P_i est extérieur à tous les autres. En effet, il existe toujours au moins un plan φ_h tel que deux des polyèdres, P_i et P_j, soient de part et d'autre de φ_h. Car, si P_i et P_j étaient tous deux d'un même côté par rapport à tous les plans φ_1, φ_2, ..., φ_n, ils coïncideraient, en vertu du *lemme*, puisque les plans de leurs faces sont tous compris dans la suite $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$.

Soit alors I un point intérieur à P_i, il est du même côté de φ_h que P_i (théorème III, 3°) et, par suite, il est de côté différent de φ_h que P_j : il est donc extérieur à P_j (théorème III, 2°).

Les polyèdres convexes $P_1, P_2, \ldots, P_k$ constituent donc bien une *décomposition* du polyèdre P.

Remarque I. — Il est aisé de se rendre compte que, puisque la surface du polyèdre P est *unique*, on peut toujours trouver une suite de polyèdres pris dans la suite $P_1, P_2, \ldots, P_k$ commençant par un polyèdre donné P_i et se terminant par un autre P_j, et telle que tout polyèdre de la suite ait *une face* ou *une arête* commune avec le polyèdre précédent, c'est-à-dire qu'on peut trouver une suite continue de polyèdres rattachés les uns aux autres et formant ainsi une chaîne reliant deux polyèdres quelconques P_i et P_j.

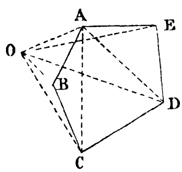
Remarque II. — Quand deux polyèdres P_i et P_j ont en commun *une arête* et une arête *seulement,* on voit immédiatement que l'une des faces de P_i aboutissant à cette arête doit être dans un même plan avec une des faces de P_j aboutissant à cette même arête, car sans cela le plan de l'une de ces deux faces traverserait le polyèdre auquel elle n'appartient pas, ce qui est impossible puisque les plans de toutes les faces de P_i et P_j appartiennent à la suite $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ et que ces deux polyèdres sont chacun situés en entier d'un même côté par rapport à chacun de ces plans. On en conclut que la suppression de cette arête commune donnera dans le polyèdre P une droite singulière. Donc, si un polyèdre n'a pas de droites singulières, deux polyèdres de la *décomposition* n'ont jamais une *arête seule* en commun :

s'ils se touchent, ils ont en commun soit un sommet, soit une face. Donc, dans ce cas, un polyèdre de la suite qui lie deux polyèdres P_i et P_j a en commun, avec le précédent, *une face tout entière*.

Théorème VIII. — *Tout polyèdre peut être* décomposé *en tétraèdres*.

1° Je dis que tout polyèdre convexe est décomposable en tétraèdres. En effet, les faces étant des polygones convexes, on peut *décomposer* chacune de ces faces en triangles en joignant un sommet quelconque à tous les autres (tout point intérieur à un de ces triangles n'est situé à l'intérieur d'aucun autre). Par ce procédé les faces du polyèdre sont décomposées en triangles t_1, t_2, ..., t_k. Soit alors (*fig.* 3) O un point quelconque

Fig. 3.



intérieur au polyèdre : je joins O à tous les sommets du polyèdre. Les sommets des triangles t_1, t_2, ..., t_k coïncident avec les sommets du polyèdre; donc les trois droites OA, OB, OC qui joignent le point O aux trois sommets qui déterminent un triangle t_i forment, avec ce triangle, un certain tétraèdre T_i. Nous formons ainsi k tétraèdres T_1, T_2, ..., T_k. Ces tétraèdres ont deux à deux une face commune : car, si deux triangles t_i et t_j ont un côté commun AC, les tétraèdres T_i et T_j ont en commun la face OAC.

Tout point situé à l'intérieur d'un tétraèdre T_i est à l'extérieur de tous les autres : en effet, soit α un point intérieur à T_i; la semi-droite $O\alpha$, prolongée au delà de α, coupera t_i; d'ailleurs, comme le polyèdre est convexe et que O est intérieur, $O\alpha$ coupe une face et une seule du polyèdre : elle ne rencontre donc aucun autre triangle que t_i. La semi-droite issue de α et de direction *opposée* à la direction αO ne coupe aucune des faces des tétraèdres autres que T_i : α est donc extérieur à tous ces tétraèdres. Enfin, il est bien clair que, si l'on supprime les faces communes, telles que AOC, il ne restera que les triangles $t_1, t_2, \ldots, t_k$ qui constituent la surface du polyèdre donné. Les tétraèdres $T_1, T_2, \ldots, T_k$ décomposent donc ce polyèdre.

2° Un polyèdre quelconque est décomposable en tétraèdres. En effet, commençons par le décomposer en polyèdres convexes, puis décomposons chacun de ces polyèdres convexes en tétraèdres; mais, dans cette décomposition, nous aurons soin de décomposer une face commune à deux polyèdres de la même façon dans les deux polyèdres. Nous aurons ainsi obtenu la décomposition demandée.

Théorème IX. — *Quand un polyèdre P est décomposé en un certain nombre de polyèdres* $P_1, P_2, \ldots, P_h$:

1° *Tout point intérieur à un polyèdre* P_i *est intérieur au polyèdre* P;

2° *Tout point extérieur à la fois à tous les polyèdres* $P_1, P_2, \ldots, P_h$ *est extérieur au polyèdre* P.

En effet :

1° Soit A un point intérieur à P_i; A sera extérieur à tous les polyèdres P_j $(j \neq i)$. Considérons une semi-droite Ax issue de A et ses intersections avec tous les polyèdres $P_1, P_2, \ldots, P_h$: cette semi-droite coupe

P_i en un nombre *impair* de points et chacun des autres en un nombre *pair* de points. Le nombre total des points d'intersection est donc *impair*. Or ces points d'intersection sont composés d'abord des points d'intersection de Ax avec les faces de P et en outre des points d'intersection avec les faces communes. Chaque point d'intersection avec une face commune à deux polyèdres est comptée deux fois et deux fois seulement : le nombre total de ces points d'intersection est donc *pair*. Donc Ax coupe P en un nombre impair de points : A est *intérieur* à P.

2° Si A est extérieur à $P_1, P_2, \ldots, P_h$, Ax coupe chacun des polyèdres $P_1, \ldots, P_h$ en un nombre *pair* de points; elle coupe donc P en un nombre *pair* de points et A est *extérieur* à P.

Corollaire. — Tout point intérieur à P est intérieur à un polyèdre P_i et à un seul.

Donc l'ensemble des points intérieurs à P est *identique* à l'ensemble des points intérieurs aux divers polyèdres composants P_1. $P_2, \ldots, P_h$.

Première conséquence. — L'*intérieur* d'un polyèdre est égal à la somme des *intérieurs* des divers polyèdres composants.

L'*intérieur* d'un polyèdre est donc mesurable et le *volume* d'un polyèdre est égal à la somme des *volumes* des polyèdres en lesquels il est décomposé.

En particulier, si l'on décompose un polyèdre P en tétraèdres $T_1, T_2, \ldots, T_h$, on a

$$\text{vol.} P = \text{vol.} T_1 + \text{vol.} T_2 + \ldots + \text{vol.} T_h.$$

Seconde conséquence. — *Si un polyèdre P n'a pas de droites singulières*, on peut toujours trouver un chemin continu, *situé tout entier à l'intérieur du po-*

lyèdre, et allant d'un point intérieur quelconque à un autre point intérieur.

En effet, soient I et J deux points intérieurs à P. Imaginons qu'on ait décomposé P en polyèdres *convexes* P_1, P_2, ..., P_h, et soient P_i et P_j les deux polyèdres à l'intérieur desquels se trouvent respectivement I et J (théorème IX, corollaire).

Soient P_{i_1}, P_{i_2}, ..., P_{i_n} des polyèdres tirés de la suite P_1, ..., P_h et tels que la suite P_i, P_{i_1}, ..., P_{i_n}, P_j forme une suite continue (théorème VII, remarque I), P_i et P_{i_1} auront une face commune F_1 (théorème VII, remarque II), P_{i_2} et P_{i_1} une face F_2, ..., P_{i_n} et P_j auront une face commune F_{n+1}.

Soient alors A_1, A_2, ..., A_{n+1} des points situés respectivement à l'intérieur des faces F_1, F_2, ..., F_{n+1}. Le chemin polygonal $IF_1F_2 \ldots F_{n+1}J$ sera situé tout entier à l'intérieur de P; car chacune de ses parties, par exemple F_lF_{l+1}, étant à l'intérieur de P_{i_l} (théorème IV, remarque) tout entière, est située à l'intérieur de P.

Remarque. — Dans le cas des polyèdres admettant des droites singulières, on peut encore trouver un chemin continu situé à l'intérieur et reliant deux points intérieurs quelconques, mais ce chemin pourra quelquefois *traverser* la surface en des points situés sur des lignes singulières. En tous cas, ce chemin se composera de points intérieurs et d'un nombre fini de points situés sur la surface et ne contiendra pas de points extérieurs.

Polyèdres semblables.

Définition. — Deux polyèdres P et Q sont dits *correspondants* si l'on peut établir entre leurs éléments une correspondance *univoque* et *réciproque*, de telle façon qu'à chaque sommet de P corresponde un sommet de Q, à chaque arête une arête, etc.; et, de plus, de telle façon que deux couples de sommets correspondants soient reliées par des arêtes correspondantes, que deux arêtes correspondantes soient à l'intersection de faces correspondantes, etc. ([1]).

Théorème X. — *Lorsque deux polyèdres correspondants ont leurs angles polyèdres correspondants égaux et les faces correspondantes égales, ils sont* superposables (*on suppose évidemment que les éléments qui se correspondent dans les angles polyèdres et dans les faces sont des éléments égaux*).

Soient F une face du polyèdre P, F′ la face correspondante égale dans le polyèdre P′. Faisons coïncider F′ avec F en faisant coïncider les sommets correspondants. Soient A un sommet de F, A′ le correspondant dans F′; soient AB et AC les côtés de F qui aboutissent en A, A′B′ et A′C′ les côtés correspondants dans F′. A′B′ et A′C′ coïncident avec AB et AC; donc deux arêtes de l'angle polyèdre A′ coïncident avec leurs correspondantes dans l'angle polyèdre A, et les angles polyèdres A et A′ coïncident. On verrait de même que tous les angles polyèdres B et B′, C et C′, ..., aux différents

([1]) Je rappelle qu'on peut imaginer une correspondance toute pareille pour les polygones plans et pour les angles polyèdres. Deux polygones plans, égaux et correspondants, coïncident quand deux côtés correspondants coïncident et cette coïncidence n'est possible que d'une seule manière (ainsi il n'y a qu'une seule manière de faire coïncider deux triangles équilatéraux correspondants et égaux si l'on fait coïncider les éléments correspondants). De même, deux angles polyèdres, correspondants et égaux, coïncident si deux arêtes coïncident avec leurs correspondantes, et cette coïncidence n'est possible que d'une seule manière.

sommets de F et de F', coïncident. Mais alors la face F'_1, adjacente à F' suivant A'B', coïncide avec sa correspondante F_1, adjacente à F suivant AB, car A'B' coïncide avec AB, et les deux côtés de F'_1 passant par A' et B' et différents de AB coïncident en direction avec leurs correspondants dans F_1. On verrait de même que toutes les faces adjacentes à F' coïncident avec leurs correspondantes. En recommençant pour ces faces le même raisonnement que pour F', on verrait de proche en proche que *toutes* les faces de P' coïncident avec leurs correspondantes dans P; car nous avons supposé que l'on pouvait aller d'un point quelconque de la surface d'un polyèdre à un autre par un chemin continu tracé tout entier sur la surface.

Définition. — Deux polyèdres sont dits *semblables* s'ils sont correspondants. si les angles polyèdres correspondants sont égaux et les faces correspondantes semblables.

Les éléments correspondants de deux polyèdres semblables sont appelés éléments *homologues*.

Remarque. — Le rapport de similitude de deux faces homologues de deux polyèdres semblables P et P' est le même quelles que soient ces faces. Soient F et F_1 deux faces de P ayant un côté commun AB; les deux faces homologues dans P', F' et F'_1 auront un côté commun A'B'; le rapport de similitude de F' à F, ainsi que celui de F'_1 à F_1, est $\frac{A'B'}{AB}$: deux faces voisines sont donc dans le même rapport de similitude avec leurs homologues. Il en est donc de même pour deux faces quelconques, car, puisque la surface est unique, deux faces quelconques d'un polyèdre sont reliées par une suite de faces ayant deux à deux un côté commun.

Ce rapport de similitude commun à toutes les faces homologues des deux polyèdres est ce qu'on appelle *le rapport de similitude des deux polyèdres*.

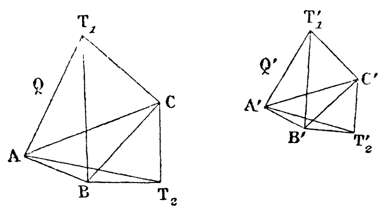
Il n'est pas évident *a priori* qu'il existe un polyèdre semblable à un polyèdre donné dans un rapport de similitude donné : nous allons montrer qu'il y en a un.

Théorème XI. — *Il existe un tétraèdre semblable à un tétraèdre donné dans un rapport de similitude donné et* un seul. (Nous passons cette démonstration.)

Théorème XII. — *Si l'on décompose un polyèdre quelconque* P *en tétraèdres* $T_1, T_2, \ldots, T_k$ *et si l'on construit des tétraèdres* $T'_1, T'_2, \ldots, T'_k$ *semblables aux précédents, dans le même rapport de similitude* λ, *les tétraèdres* $T'_1, T'_2, \ldots, T'_k$ *pourront être assemblés de la même façon que les tétraèdres* $T_1, T_2, \ldots, T_k$ *et leur ensemble, après suppression des faces communes, constituera un polyèdre semblable au polyèdre proposé* P, *dans le rapport de similitude* λ.

Supposons d'abord que les deux tétraèdres T_1 et T_2 aient une *face commune* $\mathcal{A}$. Soient (*fig.* 4) $A_1 B_1 C_1$ cette face dans T_1 et $A_2B_2C_2$ cette face dans T_2 : A_1 coïncide

Fig. 4.



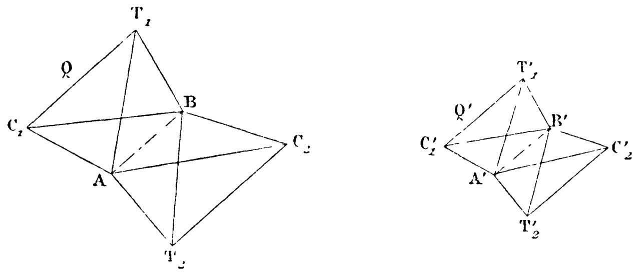
avec A_2, etc. Soit $A'_1 B'_1 C'_1$ la face de T'_1 homologue de $A_1 B_1 C_1$ et $A'_2 B'_2 C'_2$ celle de T'_2 homologue de $A_2 B_2 C_2$: $A'_1 B'_1 C'_1$ et $A'_2 B'_2 C'_2$ sont deux triangles égaux et correspondants comme semblables à des triangles égaux dans le même rapport de similitude λ. Faisons alors coïncider ces deux faces en faisant coïncider A'_2 avec A'_1, B'_2 avec B'_1, C'_2 avec C'_1 (ce qui est possible), puis supprimons cette face commune dans T'_1 et T'_2 ; de même supprimons $\mathcal{A}$ dans T_1, T_2. Nous obtenons ainsi, par la superposition de T_1 et T_2, T'_1 et T'_2, deux polyèdres Q et Q' qui sont semblables. En effet, les polyèdres sont correspondants : il suffit de considérer comme correspondants les éléments qui se correspondaient soit dans T_1 et T'_1, soit dans T_2 et T'_2 ; les angles polyèdres correspondants sont égaux : l'angle polyèdre T_1 est égal à T'_1 et T_2 à T'_2; je dis que l'angle A' est égal à l'angle A ; portons A' sur A de façon à faire coïncider le point A' avec A, que $A'C'$ prenne la direction AC et $A'B'$ la direction AB, à cause de la correspondance et de l'égalité des angles $A'B'C'T'_1$ et $ABCT_1$, $A'T'_1$ prendra la direction AT_1 et de même $A'T'_2$ prendra la direction AT_2.

Les faces sont semblables : car, si aucune des faces de T_1 n'est dans un même plan avec une des faces de T_2, aucune des faces de T'_1 ne sera dans un même plan avec une des faces de T'_2, et les faces correspondantes de Q et Q', étant des faces correspondantes des tétraèdres composants, sont semblables. Supposons, au contraire, que AT_1C et AT_2C soient dans un même plan : alors le quadrilatère AT_1CT_2 sera une face de Q, $A'T'_1C'$ et $A'T'_2C'$ seront aussi dans un même plan et $A'T'_1C'T'_2$ sera une face de Q' qui sera semblable à AT_1CT_2, comme composée d'un même nombre de triangles semblables et correspondants. Les deux polyèdres Q et Q' sont semblables.

Supposons en second lieu que les deux tétraèdres T_1 et T_2 aient une *arête commune*. Soit (AB), A_1B_1, A_2B_2 cette arête dans T_1 et T_2, les deux faces ABT_1 et ABT_2

ainsi que les faces ABC_1 et ABC_2 sont dans un même plan, et l'ensemble de T_1 et T_2 forme, après suppression de l'arête commune (AB), un polyèdre Q ayant quatre faces triangulaires et deux faces quadrangulaires AC_1BC_2 et AT_1BT_2 [(AB) est une ligne singulière de Q]. Les deux arêtes $A'_1B'_1$ et $A'_2B'_2$ dans les tétraèdres T'_1 et T'_2

Fig. 5.



sont égales comme semblables à deux arêtes égales A_1B_1, A_2B_2 dans le même rapport de similitude λ. Pour la même raison les dièdres $A'_1B'_1$ et $A'_2B'_2$ sont égaux. Faisons alors coïncider A'_1 et A'_2, B'_1 et B'_2 et disposons le tétraèdre T'_2 de façon que la face $A'B'T'_2$ soit dans le même plan que la face $A'B'T'_1$ et extérieure à cette face. Les deux dièdres $A'_1B'_1$ et $A'_2B'_2$ seront alors dans la position de deux dièdres opposés par l'arête et $A'B'C'_2$ sera dans le même plan que $A'B'C'_1$ et extérieure à cette face. Si l'on supprime l'arête commune $(A'B')$ on obtient un polyèdre Q' ayant deux faces quadrangulaires $A'C'_1B'C'_2$ et $A'T'_1B'T'_2$ qui sont évidemment semblables respectivement aux faces AC_1BC_2 et AT_1BT_2 de Q.

D'ailleurs les angles polyèdres de Q et Q' sont égaux. C_1 est égal à C'_1, C_2 à C'_2, T_1 à T'_1, T_2 à T'_2; A' est égal à A, car si l'on porte A' sur A de façon que $A'C'_1$ prenne la direction AC_1 et $A'C'_2$ la direction AC_2, la droite singulière

$A'B'$ prendra nécessairement la direction AB et les deux dièdres ABC_1T_1 et $A'B'C'_1T'_1$ coïncideront, puisqu'ils sont égaux et que deux arêtes correspondantes $A'B'$ et AB, $A'C'_1$ et AC_1 auront la même direction; $A'T'_1$ prendra donc la direction AT_1 et de même $A'T'_2$ prendra la direction AT_2 : les deux dièdres $A'C'_2C'_1T'_1T'_2$ et $AC_2C_1T_1T_2$ sont donc égaux. Les polyèdres Q et Q' sont semblables.

Cela étant, un des deux tétraèdres T_1 ou T_2 aura soit une arête, soit une face en commun avec un des tétraèdres $T_3, \ldots, T_k$: par exemple, T_2 aura une face commune avec T_3 et, après suppression de cette face commune, l'ensemble des tétraèdres $T_1T_2T_3$, c'est-à-dire l'ensemble de Q et de T_3 formera un certain polyèdre R. On verra alors aisément, par des raisonnements identiques à ceux que nous venons de faire, que T'_2 et T'_3 pourront être assemblés comme T_2 et T_3 et que l'ensemble de Q' et de T'_3 forme un polyèdre R' semblable à R. En continuant de la sorte, on verra de proche en proche que, puisqu'à deux tétraèdres de la série (T), ayant une arête ou une face commune, correspondent deux tétraèdres dans la série (T'), pouvant être assemblés de la même façon, on pourra assembler successivement les tétraèdres (T') de la même façon que les tétraèdres (T), et que les polyèdres successifs Q, $R, \ldots, Q', R', \ldots$ seront toujours semblables. Donc, finalement, on pourra superposer tous les tétraèdres (T') de même que les tétraèdres (T), et le polyèdre final P' obtenu sera semblable au polyèdre P dans le rapport de similitude λ.

Nous avons ainsi prouvé qu'il existe *un* polyèdre semblable à un polyèdre donné, dans un rapport de similitude donné; nous allons maintenant montrer qu'il n'y en a qu'*un seul*.

THÉORÈME XIII. — *Si deux polyèdres* P_1 *et* P_2 *sont semblables à un même polyèdre* P, *dans le même rapport de similitude* λ, *ils sont* identiques.

En effet, faisons correspondre dans P_1 et P_2 les éléments qui sont homologues d'un même élément de P : les deux polyèdres P_1 et P_2 sont donc correspondants. D'ailleurs, deux angles polyèdres correspondants sont égaux, puisqu'ils sont égaux à un troisième, et deux faces correspondantes sont égales, comme semblables à une même face de P dans le même rapport de similitude. Donc (théorème X), P_1 et P_2 sont superposables.

Corollaire I. — Il n'y a qu'un seul polyèdre semblable à un polyèdre donné dans un rapport de similitude donné.

Corollaire II. — Deux polyèdres semblables sont décomposables en un même nombre de tétraèdres semblables et semblablement placés.

THÉORÈME XIV. — *Le rapport des volumes des deux tétraèdres semblables est égal au rapport des cubes de deux arêtes homologues.* (Nous passons cette démonstration.)

THÉORÈME XV. — *Le rapport des volumes de deux polyèdres semblables est égal au rapport des cubes de deux arêtes homologues.*

En effet, soient P et P' deux polyèdres semblables dans le rapport λ. Supposons P décomposé en tétraèdres $T_1, T_2, \ldots, T_k$ et soient $T'_1, T'_2, \ldots, T'_k$ les tétraèdres semblables dans le rapport λ. On aura

$$\text{vol.}\,P = \text{vol.}\,T_1 + \text{vol.}\,T_2 + \ldots + \text{vol.}\,T_k,$$
$$\text{vol.}\,P' = \text{vol.}\,T'_1 + \text{vol.}\,T'_2 + \ldots + \text{vol.}\,T'_k;$$

d'ailleurs

$$\lambda^3 = \frac{\text{vol.}\,\mathrm{T}'_1}{\text{vol.}\,\mathrm{T}_1} = \frac{\text{vol.}\,\mathrm{T}'_2}{\text{vol.}\,\mathrm{T}_2} = \ldots = \frac{\text{vol.}\,\mathrm{T}'_k}{\text{vol.}\,\mathrm{T}_k} = \frac{\text{vol.}\,\mathrm{T}'_1 + \ldots + \text{vol.}\,\mathrm{T}'_k}{\text{vol.}\,\mathrm{T}_1 + \ldots + \text{vol.}\,\mathrm{T}_k}.$$

Donc

$$\lambda^3 = \frac{\text{vol.}\,\mathrm{P}'}{\text{vol.}\,\mathrm{P}}.$$

λ est égal au rapport de deux arêtes homologues quelconques de deux tétraèdres semblables T'_i, T_i, et par conséquent λ est égal au rapport de deux arêtes homologues quelconques de P' et P.