E. BOREL

Solution géométrique de la deuxième et de la quatrième partie de la question proposée aux candidats à l'École polytechnique en 1889

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 8 (1889), p. 509-512

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1889_3_8__509_0>

SOLUTION GÉOMÉTRIQUE DE LA DEUXIÈME ET DE LA QUATRIÈME PARTIE DE LA QUESTION PROPOSÉE AUX CANDIDATS A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE EN 1889;

PAR M. E. BOREL,
Élève de Sainte-Barbe et de M. Niewenglowski.

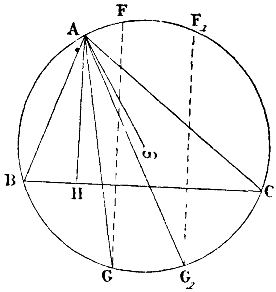
On considère deux paraboles dont les tangentes aux sommets sont deux droites rectangulaires fixes Ox, Oy et dont les foyers décrivent des parallèles à ces droites. Il s'agit de prouver que *la somme des angles que font les trois tangentes communes à ces deux paraboles avec l'axe* Ox *ne dépend que de la direction de la droite* FF'.

Considérons le triangle formé par les trois tangentes communes et le cercle circonscrit à ce triangle. On sait que ce cercle passe par F et F′ et que les droites de Simson, relatives aux points F, F′ par rapport à ce triangle, sont précisément les droites Ox, Oy. Comme ces droites sont rectangulaires, les points F et F′ sont diamétralement opposés. On peut donc, au lieu de FF', considérer la droite ωF, ω étant le centre du cercle, et le théorème à démontrer devient le suivant : *la somme des angles que font les trois côtés d'un triangle avec la droite de Simson relative à un point* F *ne dépend que de l'angle que fait avec cette même droite le rayon* ωF.

Pour le faire voir, examinons ce qui se passe lorsque le point F se déplace sur la circonférence circonscrite au triangle ABC, ce dernier restant fixe (*fig.* 1). On sait que, si le point F décrit un arc 2α, la droite de Simson relative à ce point subit une rotation égale à $-\alpha$

(elle est, en effet, parallèle à la droite AG, G étant le symétrique de F par rapport à BC, et deux arcs symétriques FF_1 et GG_1 sont égaux et de signes contraires). Il en résulte que l'angle de chacun des côtés du triangle avec cette droite augmente de α; leur somme augmente

Fig. 1.

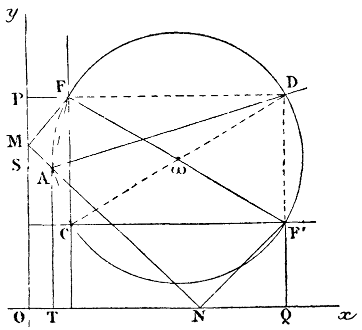


donc de 3α. Or l'angle de ωF avec cette droite augmente aussi de 3α, puisque ωF subit une rotation de 2α et la droite de Simson correspondante, une rotation de $-\alpha$. Il résulte de là que, si le théorème est vrai pour une position particulière du point F, il subsiste quand ce point décrit la circonférence. Or, si nous supposons que le point F coïncide avec un sommet A du triangle, la droite de Simson est la hauteur AH, laquelle fait avec BC un angle égal à $\frac{\pi}{2}$; la somme algébrique des angles qu'elle fait avec AB et AC est égale à $\widehat{HAC} - \widehat{HAB}$, c'est-à-dire à $\widehat{HAC} - \widehat{CA\omega}$ ou à $\widehat{\omega AH}$. On voit donc que la somme des trois angles de la droite de Simson avec les trois côtés surpasse de $\frac{\pi}{2}$ l'angle de ωF avec cette même droite (ces égalités ayant lieu à un multiple de π près, puisque les directions des droites ne sont pas déterminées).

Donc, *la somme des angles que font les tangentes communes avec* Ox *surpasse de* $\frac{\pi}{2}$ *l'angle de* FF′ *avec* Ox.

Il s'agit ensuite de trouver le lieu des points de concours des tangentes communes. Une droite MN (*fig.* 2), coupant Oy en M et Ox en N, est tangente aux deux paraboles si FM et F′N sont perpendiculaires sur MN, et nous venons de voir que les sommets du triangle

Fig. 2.



formé par les tangentes communes sont sur le cercle décrit sur FF′ comme diamètre. Soit A l'un des points de rencontre de MN avec ce cercle. Menons AT, F′Q perpendiculaires sur Ox, AS, FP perpendiculaires sur Oy. Les couples de triangles rectangles ATN, FPM; AMS, F′NQ; AMF, F′NA évidemment semblables, donnent

$$\frac{AT}{AN} = \frac{FP}{FM}, \qquad \frac{AS}{AM} = \frac{F'Q}{F'N}, \qquad \frac{AM}{FM} = \frac{F'N}{AN}.$$

En multipliant membre à membre et supprimant les facteurs communs, on obtient

$$AT.AS = FP.F'Q.$$

Le lieu du point A est donc l'hyperbole équilatère qui a pour asymptotes Ox, Oy et qui passe par le point de concours C des droites que décrivent les foyers. On peut se demander pourquoi il y a un lieu, alors qu'il semble que l'énoncé contienne une condition de trop. Il en résulte évidemment que chaque point du lieu est obtenu une infinité de fois. On voit en effet que, étant donné un point A du lieu trouvé, pour que ce point soit un point de rencontre des tangentes communes aux deux paraboles de foyers F et F', il faut et il suffit que l'angle FAF' soit droit. On obtient ainsi une infinité de systèmes de deux paraboles pour lesquelles le point A est obtenu comme point du lieu. Ces paraboles sont caractérisées géométriquement par ce fait que le lieu du point de rencontre de leurs axes est une droite. Soit, en effet, D le point de rencontre des axes : CD passant par le milieu ω de FF', centre du cercle, l'angle CAD est droit; la droite AD a donc une direction fixe.