J. COLETTE

Géométrie du compas

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 8 (1889), p. 512-520

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1889_3_8__512_1>

GÉOMÉTRIE DU COMPAS;

Par M. J. COLETTE,
Ancien répétiteur de Mathématiques.

L'attention a été récemment appelée, dans divers Cours préparatoires, sur certains problèmes très intéressants de la Géométrie du compas (¹). Cette Géométrie spéciale est particulièrement nécessaire, indispen-

(¹) En 1797, le mathématicien italien Mascheroni publia, sous ce même titre : *Geometria del compasso,* un Livre très savant et très élémentaire aussi, dont le capitaine Carette, du Génie, publia, l'année suivante, une excellente traduction.

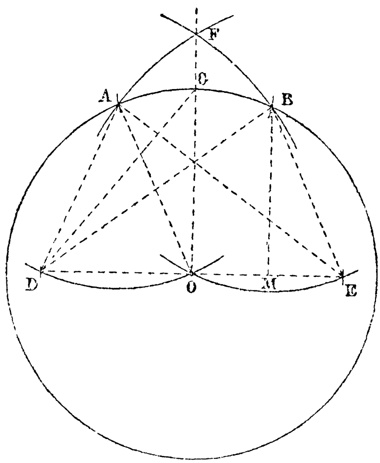
sable même, pour la construction des *épures* géodésiques et géographiques (canevas des Cartes, tracé des méridiens et des parallèles). Nous nous bornerons, ici, à en marquer quelques points importants.

De cette géométrie du compas, qui, « par le secours du compas seulement, détermine la position des points », nous citerons d'abord les deux problèmes suivants :

1° *Trouver, au moyen du compas seulement, le point milieu d'un arc* AB, *dont le centre est en* O.

Solution. — Des deux points A et B comme centres (*fig.* 1), avec le rayon R de l'arc donné, je trace deux

Fig. 1.



arcs sur lesquels je prends DO = OE = AB; puis, des points D et E comme centres, avec DB et EA pour rayons, je trace deux arcs qui se coupent en F; enfin, du point D comme centre, avec OF pour rayon, je trace un arc qui coupe l'arc donné AB en un point G qui est le point cherché.

Supposons le point G déterminé d'avance et traçons toutes les lignes pointillées de la figure, on a

$$DB = DF,$$

donc

$$\overline{DF}^2 = \overline{DM}^2 + \overline{BM}^2;$$

en prenant $OM = ME$, on aura

$$DO = 2\,OM;$$

par conséquent,

$$\begin{aligned}\overline{DF}^2 &= 9 \times \overline{OM}^2 + R^2 - \overline{OM}^2\\ &= 8 \times \overline{OM}^2 + R^2.\end{aligned}$$

Mais, d'autre part, on a aussi

$$\begin{aligned}\overline{OF}^2 &= \overline{DF}^2 - \overline{DO}^2\\ &= \overline{DB}^2 - \overline{DO}^2\\ &= 8 \times \overline{OM}^2 + R^2 - 4 \times \overline{OM}^2\\ &= 4 \times \overline{OM}^2 + R^2;\end{aligned}$$

or, dans le triangle DOG, on a

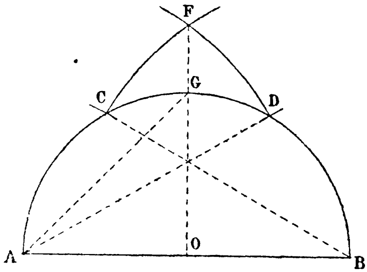
$$\begin{aligned}\overline{DG}^2 &= R^2 + \overline{DO}^2\\ &= R^2 + 4\overline{OM}^2;\end{aligned}$$

donc $DG = OF$. C. Q. F. D.

2° *Inscrire un carré dans un cercle, avec le seul emploi du compas.*

La solution est simple; car, en prenant, sur la demi-circonférence ACDB (*fig.* 2), $AC = CD = DB = R$, la question revient à trouver le milieu de l'arc CD, comme ci-dessus, et AG est le côté du carré inscrit.

Fig. 2.



La place ne nous permet pas de mentionner la solution générale du joli problème suivant :

Étant donnés deux points, trouver, au moyen du compas seul, le point ou les points qui divisent en 2, 3, 4, ... *parties la ligne qui joindrait ces deux points.*

Nous n'insisterons pas non plus sur les différents problèmes qui ont trait aux opérations suivantes, par le compas seul :

Addition et soustraction de droites dont on ne connaît que les points extrêmes;

Tracé des droites indéfinies;

Tracé des droites parallèles;

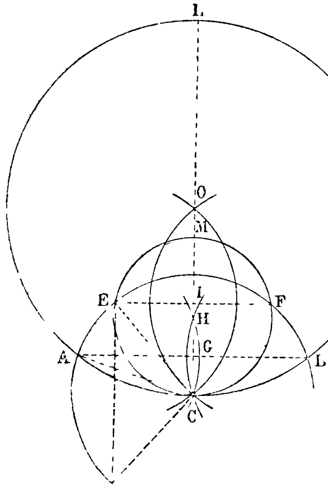
Recherche des quatrièmes proportionnelles, des moyennes proportionnelles, des points qui divisent une droite en moyenne et extrême raison, etc.

Nous donnerons seulement deux belles solutions du problème suivant, que nous ferons suivre de quelques remarques importantes :

Étant donné un cercle dont on ne connaît pas le centre, trouver ce centre en n'employant que le compas.

Première solution. — D'un point C (*fig.* 3), pris arbitrairement sur le cercle, comme centre, avec un rayon quelconque, je trace un arc de cercle qui coupe la circonférence donnée en deux points A et B. De chacun de

Fig. 3.



ces points, avec le même rayon, je trace deux arcs qui se coupent en C et en H. Je trace le cercle qui a H pour centre et HC pour rayon. Ce cercle coupe le premier arc décrit en deux points E et F; de ces deux points je décris deux arcs avec rayons EC et FC; ces deux nouveaux arcs se coupent en un point O, *centre cherché.*

En effet, traçons les lignes pointillées; nous avons dans le cercle donné

$$\overline{AC}^2 = CG \times CL.$$

En appelant R et r les rayons des cercles entièrement tracés, on a

$$CG = \frac{r}{2}, \qquad CL = 2R;$$

donc

$$\overline{AC}^2 = \frac{r}{2} \times 2R = Rr.$$

Mais, dans le petit cercle, on a

$$\overline{EC}^2 = CI \times CM,$$

et, comme $AC = EC$, on aura

$$Rr = CI \times CM.$$

Mais $CM = 2r$, donc

$$Rr = CI \times 2r;$$

donc

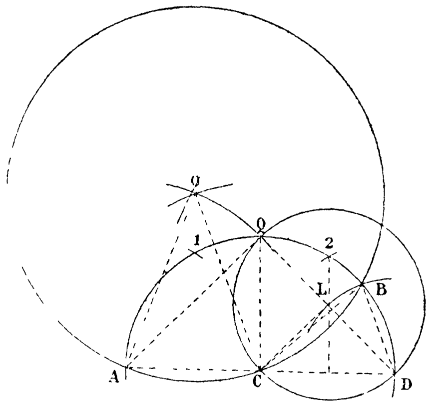
$$R = 2\,CI = CO. \qquad \text{C. Q. F. D}$$

Cette élégante solution, il faut bien le dire, a pourtant un inconvénient considérable : les deux arcs décrits des points A et B comme centres, avec AC pour rayon, se coupent sous un angle aigu. La solution de Mascheroni n'a pas ce défaut, tout en offrant aussi une élégante simplicité.

Seconde solution. — Prenons un cercle et une corde auxiliaire de même grandeur que ci-dessus. Menons du point C (*fig.* 4) deux cordes égales CA et CB et, en décrivant le cercle C12B, arrêtons-le au point D, extrémité du diamètre ACD. Soit B le point où ce cercle coupe le cercle donné ; du point D comme centre, avec DB pour rayon, je trace un arc qui coupe en L un arc de même rayon décrit du point C ; puis, du point L comme centre, avec le même rayon LC, je décris un arc qui coupe en Q le cercle AC : AQ est le rayon du cercle donné dont le centre sera déterminé par deux arcs décrits des points A et C avec ce rayon.

Démonstration. — On voit clairement par la figure que les deux triangles isoscèles LCD, LCQ sont égaux; que le triangle isoscèle CQA a son angle C supplémentaire du double de l'angle LCD, c'est-à-dire égal à l'angle

Fig. 4.



CLD; les deux triangles CQA et LCD sont donc semblables, et l'on a

$$QA : AC :: CD : CL$$

ou bien, d'après la construction,

$$AO : AC :: CD : DB.$$

On en déduit que les triangles OAC et CBD sont semblables, et, comme ils sont isoscèles, on voit que l'angle ACO est la moitié de l'angle ACB. Les deux triangles ACO et OCB sont donc égaux; il s'ensuit que

$$AO = OB = OC :$$

donc O est le centre cherché. C. Q. F. D.

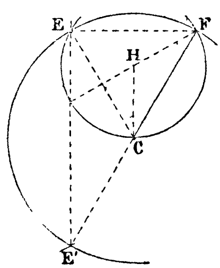
C'est la solution de Mascheroni. La première solution a été communiquée par M. de Longchamps au *Journal de Mathématiques élémentaires* (année 1878). Nous allons voir que ces deux solutions, en apparence si dissemblables, ne sont qu'une seule et même solution.

D'abord il suffit d'un peu d'attention pour constater que la longueur du rayon HC de la première solution n'est autre que le côté BD de la deuxième. Quant à la similitude des deux triangles OAC et CBD de la deuxième solution, elle est presque une évidence que Mascheroni démontre un peu péniblement. En somme, le rayon cherché du cercle donné n'est pas autre chose que la troisième proportionnelle de deux longueurs connues : CA et CH de la première solution, et les mêmes longueurs CD et DB de la seconde.

Quant à la construction d'une troisième proportionnelle, il est intéressant de voir la solution que donne Mascheroni, en employant le seul compas.

Traçons le cercle qui a HC pour rayon (*fig.* 5), et

Fig. 5.



d'un point C de ce cercle décrivons un arc indéfini avec CE pour rayon; les deux cercles se coupent en E et en F. Du point F, je vais avec le compas, par trois rayons successifs, jusqu'en E'. Alors FE' est un diamètre. Sans entrer dans les détails, on voit que les triangles CEE' et CHF sont semblables; on a donc

$$CH : CF :: CE : EE' :$$

donc EE′ est la troisième proportionnelle cherchée.

Il suffit de regarder la figure de la première solution ci-dessus (*fig.* 3) pour voir que la ligne EE′ de cette figure est le rayon cherché, d'ailleurs égal à CO par construction.

Quant à la figure de la deuxième solution (*fig.* 4) elle est tout aussi évidente : par le point C passe le cercle dont le rayon CL est égal à BD. Du point C, avec CA pour rayon, nous avons tracé le cercle qui coupe le petit cercle en Q et D ; or, DA étant un diamètre, QA est la troisième proportionnelle, c'est-à-dire le rayon cherché.

Les deux solutions sont donc identiques. C. Q. F. D.